

SOUTENANCE DU TIPE

AVANT-PROPOS : j'ai projeté mon TIPE en mode « paysage » double page. Chaque double page compte pour un transparent et sera donc numéroté \mathbf{T}_i (pour le i -ème transparent). Le temps indiqué correspond au temps du chrono au moment du changement de transparent.

\mathbf{T}_1 (0'00)

Introduction :

→ Yvon Villarceau a découvert en 1848 une famille de cercles sur le tore autre que les méridiens et les parallèles. Je me suis donc demandé comment obtenir ces cercles, s'ils possédaient des propriétés particulières, et par quels moyens les mettre en évidence. Pour répondre à ces questions j'ai d'abord étudié ces cercles d'un point de vue analytique, et j'ai réalisé une épure ; puis j'ai démontré leur existence d'un point de vue algébrique. Par ailleurs j'ai montré que les cercles de Villarceau sont un cas particulier de loxodromies du tore. Enfin j'ai réalisé une découpe sur un tore en polystyrène de façon à visualiser concrètement les cercles.

→ Par construction un tore de paramètres a et R est la surface engendrée par la rotation d'un cercle de rayon R autour d'une droite à une distance a de son centre. Je paramètre donc le cercle bleu et je lui applique une matrice de rotation, j'obtiens la paramétrisation suivante du tore.

→ Je précise ensuite la position locale d'un plan tangent par rapport à la surface. Pour cela je détermine l'équation du plan tangent en un point de paramètres (ϕ_0, θ_0) fixés. J'étudie la fonction de deux variables suivante qui est donc nulle en ce point, et un calcul de dérivées partielles montre que c'est un point critique. On détermine sa nature en étudiant le signe de la courbure totale qui ne dépend que de celui de $\cos \varphi_0$. Ainsi pour φ_0 entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ les points à la surface du tore sont elliptiques, c'est-à-dire que localement la surface reste du même côté du plan, et au contraire le plan la traverse au delà de $\pi/2$.

\mathbf{T}_2 (1'15)

→ Les méridiens et les parallèles sont l'intersection du tore avec des plans verticaux et horizontaux. Les cercles de Villarceau, quant à eux sont obtenus en coupant le tore par un plan tangent en deux points de la surface du tore. A rotation près, pour avoir un tel plan on voit dans la coupe $x = 0$ qu'il est nécessaire de choisir $\alpha = \arcsin(R/a)$ et comme équation de plan $z = \tan(\alpha)y$. Je calcule les coordonnées des points de tangences A_1 et A_2 , qui sont hyperboliques et donc le plan bitangent traverse le tore. C'est l'étude de cette intersection qui nous intéresse ensuite.

→ Je munis le plan \mathcal{P}_α d'un repère orthonormé approprié, et je traduis l'intersection du plan bitangent avec le tore par un système de deux équations. Je cherche à réécrire l'équation sous la forme d'un produit et en identifiant les coefficients des deux équations il en découle l'équation

des deux cercles de Villarceau dans le plan \mathcal{P}_α . On peut également donner une paramétrisation de ces cercles en utilisant celle du tore.

\mathbf{T}_3 (2'01)

Ce qui m'a permis outre le fait de les tracer en 3D, de montrer qu'ils peuvent aussi être obtenus comme intersections du tore avec les sphères de centres $(\pm R, 0, 0)$ et de rayon a .

→ J'ai poursuivi mon étude par la construction d'une épure, qui est la représentation du tore par sa projection sur 3 plans, de façon à y visualiser les cercles de Villarceau. Tout d'abord je coupe le tore par un plan méridien, la coupe vue de côté est l'ellipse. En effet si la droite noire était horizontale on verrait de côté un cercle, mais en pivotant légèrement celle-ci le cercle se déforme en une ellipse. Pour la tracer avec Geogebra j'ai eu besoin de 5 points. On en dispose de quatre directement en reportant ces points opposés en rouge, verticalement, et horizontalement en vue de côté. Je les note A, B, C, D . On trace le cercle de diamètre $[AB]$, et sachant que l'image de celui-ci par une affinité de rapport OB/OC est une ellipse, il suffit alors de prendre l'image d'un point du cercle par l'affinité. En bleu je repère l'intersection de l'ellipse avec la droite témoin du plan bitangent, que je reporte en vue de dessus. Ainsi en faisant pivoter d'un tour le plan méridien j'obtiens tous les points d'intersections du plan bitangent avec le tore et on voit se dessiner les cercles de Villarceau dans ces différents plans.

\mathbf{T}_4 (3'10)

→ Dans la partie suivante on démontre l'existence des cercles Villarceau par des arguments non plus géométriques mais algébriques. Pour cela on va avoir besoin d'introduire la notion d'espace projectif, qui est le quotient d'un espace vectoriel par la relation d'équivalence qui identifie deux points alignés avec l'origine.

→ Traitons rapidement l'exemple du plan projectif de \mathbb{R}^3 . Les points m, n, r appartiennent au plan (P') . Un observateur placé au point O voit tous les points de la droite (OM) en m . Il y a donc bijection entre les droites vectorielles de \mathbb{R}^3 non parallèles à (P) et les points du plan (P') . L'espace projectif de \mathbb{R}^3 est donc en bijection avec le plan affine (P') auquel on ajoute l'ensemble des droites vectorielles de (P) . On se place maintenant dans l'espace projectif complexe quotient de $\mathbb{C}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\}$ par \mathcal{R} qu'on identifie à \mathbb{C}^3 en associant à (x, y, z) la classe d'équivalence $(x, y, z, 1)$, complété par un plan à l'infini ensemble des classes d'équivalence des vecteurs de la forme $(X, Y, Z, 0)$.

→ Les points cycliques d'un plan sont par définition les points à l'infini de tous ses cercles, de coordonnées projectives $(1, \pm i, 0)$. En effet en homogénéisant l'équation d'un cercle puis en faisant $Z = 0$ il vient $X^2 + Y^2 = 0$ dont les racines sont. On appelle ombilicale l'ensemble de tous les points cycliques de tous les plans d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. De même en homogénéisant on montre que l'intersection du tore avec le plan à l'infini est l'ombilicale comptée deux fois.

→ On montre également que l'intersection d'un plan tangent avec la surface est une courbe de même degré que la surface et que le point de tangence est un point double. On peut alors démontrer le théorème de Villarceau. D'après la propriété précédente, l'intersection est une quartique admettant deux points doubles réels. Or les points à l'infini du tore sont l'ombilicale, et les deux points cycliques d'un plan sont par définition situés sur l'ombilicale donc on compte également deux points cycliques, doubles car l'ombilicale est comptée deux fois. Soit quatre points doubles

disons M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 un point de la quadrique. Une unique conique \mathcal{C} passe par ces points et $\mathcal{C} \cap \mathcal{Q}$ contient 9 points donc cela met en défaut le théorème de Bézout et on en déduit que la conique est incluse dans la quadrique. De même pour une autre conique passant par un autre point M'_5 . De là on en conclut que l'intersection est dégénérée en deux coniques qui sont en fait des cercles car passant par les points cycliques.

T₅ (5'20)

→ Je me suis ensuite demandé si les cercles de Villarceau possédaient des propriétés remarquables. L'objet de cette partie est d'établir que ce sont des loxodromies du tore. Une loxodromie d'une surface de révolution étant une courbe \mathcal{C}^1 tracées sur celle-ci qui coupe les parallèles suivant un angle constant (et donc les méridiens également). On cherche ainsi les loxodromies du tore d'angle β sous la forme $G(\vec{\theta}) = F(\theta, \varphi(\theta))$ où F est la fonction de paramétrage du tore.

→ Je détermine donc un vecteur tangent à la courbe $G(\vec{\theta})$ et au parallèle, exprimé dans la base décrite cela revient à ce que les vecteur \vec{V}_1 et \vec{V}_2 forment un angle β . En faisant intervenir un vecteur auxiliaire \vec{V}_β on a deux situations possibles, et en traduisant la condition d'alignement par un déterminant nul on obtient au signe près une équation différentielle.

→ On choisit maintenant $\beta = \alpha$ et un signe positif, l'équation différentielle obtenue est à variables séparables. En effectue le changement de variable cité et on détermine après quelques lignes de calculs l'expression de $\varphi(\theta)$. En remplaçant dans $F(\theta, \varphi(\theta))$ on obtient un système d'équation paramétrique de la courbe dépend de θ . En projetant la courbe sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on reconnaît l'équation polaire d'une ellipse. On remarque que, pour tout point $M(x, y, z)$ de L , on a : $z = y \tan \alpha$. On en déduit que L est l'un des deux cercles de $\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{\alpha, R}$. Pour déterminer lequel on considère le point de paramètre $\theta = 0$ et on montre que L est le cercle d'équation... L'autre étant obtenu pour $\varepsilon = -1$. Conclusion : les loxodromies d'angle α sont les cercles de Villarceau.

T₆ (6'45)

→ Les cercles de Villarceau étaient connus bien avant celui qui leur a donné leur nom, puisqu'on les trouve dans l'escalier du musée de la cathédrale de Strasbourg, oeuvre de Thomas Uhlberger vers 1580.

→ Enfin je réalise la découpe d'un tore en polystyrène de façon à visualiser concrètement les cercles de Villarceau. La première difficulté a été de tracer ces cercles à la surface du tore. On a vu qu'ils s'obtiennent en coupant le tore par un plan bitangent incliné d'un certain angle. J'ai eu l'idée d'inverser le problème, au lieu d'incliner le plan j'ai incliné le tore et je l'ai plongé dans une bassine d'eau. Comme le suggère ce schéma, la surface de l'eau va jouer le rôle du plan bitangent. J'ai donc commencé par prendre un support de même hauteur que le tore. J'incline le tore,

T₇ (8'00)

et je place l'ensemble dans une bassine, le tout stabilisé par une plaque en métal. Puis j'ai vidé minutieusement de l'eau colorée dans la bassine, jusqu'au niveau du point de tangence. Après quelques minutes la trace des cercles apparaissait et j'ai vidé le liquide à la seringue pour que la trace reste nette.

T₈ (8'21)

→ Ensuite j'ai refait l'expérience avec l'autre face. Mais étant complètement colorée en rose j'ai du utiliser une coloration plus prononcée, une teinture de vêtements violette. De la même manière j'ai ajusté au niveau, j'ai laissé agir, et une fois sec je suis repassé au feutre sur les cercles dessinés à la surface du tore. J'ai pris soin de vérifier que j'obtenais bel et bien des cercles, pour cela j'ai préalablement mesuré les caractéristiques du tore R et a puis j'ai pointé un compas à une distance $\pm R$ du centre du tore avec un écartement a et j'ai regardé si en traçant les cercles ces derniers coïncidaient avec ceux obtenus par le niveau d'encre, c'était approximativement le cas. La deuxième difficulté consistait à effectuer la découpe, car ce tore était plein donc il a fallu que je coupe en inclinant la scie tout en m'appuyant sur les contours dessinés comme sur cette photo. Et voici enfin le résultat après découpe.

T₉ (8'30)

Conclusion :

En somme ce TIPE s'est consacré une étude approfondie du tore, et de la section plane bitangente qui se compose de deux cercles au lieu d'être vulgairement une courbe plane de degré quatre comme le tore lui-même. C'est cette séparation en deux cercles qui est le phénomène tout à fait inattendu. De plus les cercles de Villarceau possèdent des propriétés particulières entre autre de loxodromies, et donne lieu actuellement à des recherches actives en modélisation 3D puisqu'ils permettent de construire des triangles non plans servant de patch dans les maillages utilisés ■.