

Fiche synoptique

Titre :

Recette géométrique des beignets.

Présentation :

M. Yvon Villarceau, dans une note communiquée à M. Babinet en 1848, fait remarquer un curieux résultat géométrique. Le tore possède comme la sphère des méridiens et des parallèles. Mais il possède aussi deux autres étonnantes familles de cercles, à découvrir, les cercles de Villarceau.

Objectifs :

Prouver l'existence de ces cercles, en donner une équation et certaines propriétés, ainsi que les mettre en évidence.

Démarche :

Mon travail s'est articulé autour de ces différentes étapes :

- Construction des cercles comme intersection du tore avec un plan bitangent : en paramétrant ces deux objets je donne une équation des cercles dans ce plan, et enfin un paramétrage de ceux-ci dans l'espace. Je montre également qu'ils s'obtiennent comme l'intersection du tore avec une sphère.
- Construction d'une épure : J'ai voulu visualiser les cercles de Villarceau en projection frontale et horizontale, en ramenant ainsi le problème au plan.
- Démonstration algébrique de l'existence de ces cercles : l'intersection peut être vue comme une quartique possédant quatre points doubles, ce qui montrera qu'elle est dégénérée en deux coniques et plus précisément en deux cercles.
- Etude d'une propriété des cercles de Villarceau : je montre dans cette dernière partie que ce sont des loxodromies du tore.

Plan :

Introduction.

Préliminaires : construction du tore, position d'un plan tangent, équation cartésienne.

I. Etude analytique des cercles de Villarceau

- 1) Plan bitangent
- 2) Equation des cercles
- 3) Représentation dans l'espace

II. Epure

Description des étapes de la construction et représentation plane des cercles.

III. Démonstration algébrique

On prouve l'existence des cercles de Villarceau à partir de plusieurs résultats basés sur le théorème de Bézout. On introduira pour cela la notion d'espace projectif.

IV. Loxodromies du tore

- 1) Equation différentielle
- 2) Résolution pour un angle bien choisi
- 3) Conclusion

V. Note historique et exemples architecturaux

Bilan :

Guidé par mon professeur de mathématiques, ce TIPE m'a permis d'aborder différents domaines au croisement de la géométrie tantôt analytique, tantôt descriptive ou algébrique. J'ai pu aussi exploiter les fonctionnalités de divers logiciels mathématiques et langages : Maple, Geogebra, TikZ et Asymptote. Et surtout découvrir avec beaucoup de plaisir ces cercles exotiques et leurs propriétés remarquables.

Bibliographie :

Eiden J.D., *Géométrie analytique classique*, Calvage & Mounet, **2009**

<http://www.bibnum.education.fr/files/villarceau-analyse.pdf> par Marcel Berger, **2010**

Sujet de mathématiques II, TPE, **1996**

<http://denisfeldmann.fr/PDF/cercles.pdf>