Kévin Polisano
MPSI 1

Lundi 1er Octobre 2007

Devoir de Mathématiques n°3

Observations :

Exercice : fonctions circulaires réciproques

1) Désignons par A et B les quantités suivantes :

A = 2arctan(rac(1+x²) – x) et B = pi/2 – arctan(x)

tan(A) = 2(rac(1+x²) – x) / [1 – (rac(1+x²)-x)²] = 2(rac(1+x²)-x) / 2(xrac(1+x²)-x²) = 1/x

tan(B) = 1/tan(arctan(x)) = 1/x

Les fonctions x → A(x) et x → B(x) sont définies sur |R à valeur respectivement dans]-pi ; pi[et]0 ; pi[. Donc l'ensemble image de B est inclus dans celui de A.

De plus on a pour tout x réel tan(A) = tan(B) d'où par injectivité **A = B.**

On a donc montré que pour tout x réel : **arctan(x) + 2arctan(rac(1+x²) – x) = pi/2**

2) On se propose de dériver la fonction f définie sur]0,1] par :

f(x) = 2arctan[rac((1-x)/x)] + arcsin(2x-1)

f est derivable sur l'intervalle]0,1[(notons que l'on exclut 1 puisque la fonction x → arcsin(x) n'est pas dérivable en 1, et également du fait du radicande nul en 1 et que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0). Ainsi pour tout x de]0,1[on a après quelques calculs :

f'(x) = 0 et donc la fonction y est constante sur]0,1] (car continue en 1).

Par conséquent f(x) = f(1) = 2arctan(0) + arcsin(1) = pi/2.

On en déduit que pour tout x appartenant à]0,1] :

2arctan[rac((1-x)/x)] + arcsin(2x-1) = pi/2

3) Soit x dans [-1,1] posons a = arcos(x). On a alors :

cos(n(arccos(x))) = Re(cos(na)+isin(na))
cos(n(arccos(x))) = Re[(cos(a)+isin(a))^n] (formule de moivre)
cos(n(arccos(x))) = Re [(x + iV(1-x^2))^n]
cos(n(arccos(x))) = Re [Sum(k=0..n)C(n,k)x^(n-k)i^k(V(1-x^2))^k)
cos(n(arccos(x))) = Sum(k=0..E(n/2)) C(n,2k)x^(n-2k)(i)^2k(1-x^2)^k
cos(n(arccos(x))) = Sum(k=0..E(n/2)) C(n,2k)x^(n-2k)(x^2-1)^k

Il est alors clair que la fonction x $\rightarrow$ cos(n(arccos(x)) est polynomiale.

<u>Remarque</u> : ce type de fonctions fait l'objet d'études dans le cadre des polynômes de Tchebychev, il est possible d'établir plusieurs résultats intéressants à savoir par exemple le degré de ces polynômes, une relation de récurrence…etc qui servent dans l'interpolation de Lagrange.

La fonction x $\rightarrow$ sin(n.arccos(x)) / rac(1-x^2) est **la dérivée de la précédente** (au signe près) qui est polynomiale. Or la dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré n-1, il en découle que la fonction x $\rightarrow$ sin(n.arccos(x)) / (1-x^2) est également polynomiale de degré inférieur à la précédente.

<u>Problème : théorème de Morley</u>

Partie I – Calculs préliminaires

1) On a la relation : z1 + jz2 + j^2z3 = 0. Multiplions par j cette équation :

jz1 + j^2z2 + z3 = 0 $\Leftrightarrow$ jz1 + (-1-j)z2 + z3 = 0 $\Leftrightarrow$ j(z1-z2) = z2-z3

Donc : (z1-z2) / (z3-z2) = -1/j = e^(ipi)/e^(i2pi/3) = e^(ipi/3)

(Z2Z3, Z2Z1) = arg[(z1-z2)/(z3-z2)] = **pi/3** et aussi :

| (z1-z2)/(z3-z2) | = 1 $\Leftrightarrow$ |z1-z2| = |z3-z2| $\Leftrightarrow$ **Z1Z2 = Z2Z3**

En faisant de même pour les deux autres quotients on en déduit que Z1Z2Z3 est un **triangle équilatéral**.

2) Supposons uv = 1 $\Leftrightarrow$ e^(2i(x+y)) = 1 $\Leftrightarrow$ x+y=0 $\Leftrightarrow$ x=0 et y=0 car ce sont des angles. Or x et y sont dans]0 ; pi/3[donc uv différent de 1. En effet si x=0 et y=0 alors 3x=0 et 3y=0 et le triangle est plat. Par suite **vw et wu sont différents de 1.**

Par ailleurs uvw = e^(2i(x+y+t)) = e^(2i(A/3+B/3+C/3)) = e^(2ipi/3) = j

3) Mettons sous forme trigonométrique le quotient u(1-v)/(1-uv), pour cela passons à la forme exponentielle :

u(1-v)/(1-uv) = e^(2ix)(1-e^(2iy)) / 1-e^(2i(x+y))
u(1-v)/(1-uv) = e^(2ix)e^(iy)[e^(-iy)-e^(iy)] / e^(i(x+y))[e^(-i(x+y))-e^(i(x+y))]

$u(1-v)/(1-uv) = e^{(ix)} * \sin(y)/\sin(x+y)$

L'argument de ce complexe est donc x. Procédons identiquement pour le second quotient :

$(1-u)/(1-uv) = (1-e^{(i2x)}) / (1-e^{(2i(x+y))})$
$(1-u)/(1-uv) = e^{(ix)}[e^{(-ix)}+e^{(ix)}] / e^{(i(x+y))}[e^{(-i(x+y))} + e^{(i(x+y))}]$
$(1-u)/(1-uv) = e^{(-iy)} * \sin(x)/\sin(x+y)$.

L'argument de ce dernier étant –y.

4) $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2q)$

$E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)p + (1-uv)(1-vw)(1-wu)jq + (1-uv)(1-vw)(1-wu)j^2q$

$E = (1-uv)(1-wu)[(1-v)b + v(1-w)c] + (1-uv)(1-vw)j[(1-w)c+w(1-u)a] + (1-vw)(1-wu)j^2[(1-u)a+u(1-v)b]$

$E = (1-uv)(1-vw)(1-v)b + v(1-uv)(1-wu)c + (1-uv)(1-vw)(1-w)jc +$ **$(1-uv)(1-vw)(1-u)waj + (1-vw)(1-wu)(1-u)aj^2$** $+(1-vw)(1-wu)(1-v)uj^2b$

On s'intéresse au coefficient de a :

$jw(1-u)(1-uv)(1-vw) + j^2(1-u)(1-vw)(1-uw)$

$= (jw-ujw)(1-uv)(1-vw) + (j^2-uj^2)(1-vw)(1-uw)$

$= (jw-uvwj - juw + u^2vjw)(1-vw) + (j^2-j^2vw-uj^2+uvwj^2)(1-uw)$

$= (jw-j^2-juw + j^2u)(1-vw) + (j^2-j^2vw - uj^2 + 1)(1-uw)$

$= jw - jvw^2 -j^2 +j^2vw - juw + juvw^2 + j^2u - 1 + j^2 - j^2uw - j^2vw + j^2uvw^2 - uj^2 + u^2wj^2 + 1 - uw$

$= jw - jvw^2 + j^2vw - juw + j^2w + j^2u - j^2uw - j^2vw + w - uj^2 + j^2u^2w - uw$

$= w(j-jvw+j^2v -ju + j^2 - j^2u -j^2v + 1 + j^2u^2 - u) = w(1+j+j^2-u(1+j+j^2)+j^2u^2-jvw)$

$= w(j^2u^2-jvw)$

$= w(juvwu^2-jvw)$

$= w(ju^3vw-jvw)$

$= w(vw)(ju^3-j)$

= **$w/u*j^2(u^3-1)$**

Par permutation circulaire on obtient les coefficients de b et c, et on a donc bien :

$E = w/u*j^2(u^3-1)a + u/v*(v^3-1)b + v/w*j(w^3-1)c$

Partie II – Point fixe de Ra°Rb

1) Les transformations complexes Ra, Rb, Rc sont des **rotations** de centre et d'angles respectifs A, B, C et 2x, 2y, 2t.

2) En partant de l'équation complexe de Ra et Rb on détermine r tel que :

Ra°Rb(r) = r

u[(v(r-b)+b)-a]+a = r

u(vr-bv+b-a)+a = r

uvr – bvu + bu – au + a = r

a(1-u) + u(b-bv) = r(1-uv)

a(1-u) + u(1-v)b = r(1-uv)

3) Soustrayons (1-uv)a à chaque membre :

a(1-u) + u(1-v)b – a(1-uv) = (r-a)(1-uv)

a(uv-u) + u(1-v)b = (r-a)(1-uv)

u(v-1)a + u(1-v)b = (r-a)(1-uv)

u(1-v)[b-a] = (r-a)(1-uv)

(r-a) = [u(1-v)]/(1-uv)[b-a]

Et d'après la question 3. de la partie I on obtient (AB,AR) = x

4) a(1-u) + u(1-v)b – b(1-uv) = (r-b)(1-uv)

a(1-u) + b(u(1-v)-(1-uv)) = (r-b)(1-uv)

a(1-u) + b(u-1) = (r-b)(1-uv)

(a-b)(1-u) = (r-b)1-uv

(r-b) = (1-u)/(1-uv)*(a-b)

De même il vient (BA,BR) = -y

5) Afin de construire le point R on trace la droite passant par A qui fait un angle x avec la droite (AB) [car (AB,AR)=x] et la droite passant par B qui fait un angle –y avec (AB) [car (BA,BR)=-y], R se trouve à l'intersection des deux droites. On fait de même pour P et Q.

Partie III – Configuration principale de Morley

1) Etablissons au préalable un résultat intéressant sur l'ensemble des rotations :

Si on note B(E) l'ensemble des applications bijectives de E dans E alors on montre aisément que (B(E),°) est un groupe non commutatif. En particulier dans le plan P, soit R l'ensemble des rotations de centre O. L'expression complexe de la rotation ra de centre O et d'angle a est z' = e^(ia)z. Puisque ra est bijective (sa réciproque est r-a), on a R inclus dans B(P). Montrons que R est un sous groupe de (B(P),°) :
La loi ° est interne dans R, en effet ra°rb = r(a+b) dans R et pour tout élément ra de R, son symétrique r-a pour la loi ° appartient à R, donc R est un sous groupe de (B(P), °) donc (R,°) est un groupe. De plus comme ra°rb = r(a+b) = r(b+a) = rb°ra on voit que (R,°) est un groupe commutatif. (on remarque qu'un sous groupe d'un groupe non commutatif peut être un groupe commutatif).

On montre en outre par récurrence (en passant par la forme complexe) que pour une rotation de centre fixé et d'angle a, la composée nième de cette rotation avec elle-même est une rotation de même centre et d'angle n*a.

Il en résulte que la rotation Rc^3 de centre C a pour angle 3*2t = 2*(CA,CB). Il est alors clair que A'=Rc(a)^3 est le symétrique de A par rapport à (BC).

2) La somme des angles de rotations composantes vaut 2pi donc c'est une translation. Rc^3 transforme A en A' et Rb^3 transforme A' en A et Ra laisse A invariant. Donc il s'agit de la translation identique.

3) Ra^3°Rb^3°Rc^3(z) = u^3(v^3(w^3(z-c)+c-b)+b-a) + a

Ra^3°Rb^3°Rc^3(z) = u^3(v^3(w^3z – w^3c + c – b)+b-a) + a

Ra^3°Rb^3°Rc^3(z) = u^3(v^3w^3z – v^3w^3c + v^3c – v^3b +b-a) + a

Ra^3°Rb^3°Rc^3(z) = (uvw)^3z – (uvw)^3c + u^3v^3c – u^3v^3b + u^3(b-a) + a

Ra^3°Rb^3°Rc^3(z) = z - (uvw)^3c + u^3v^3c – u^3v^3b + u^3(b-a) + a

Or Ra^3°Rb^3°Rc^3(z) = z d'où :

c(u^3v^3-(uvw)^3c) + bu^3(1-v^3) + a(1-u^3) = 0

(1-u^3)a + u^3(1-v^3)b + u^3v^3(1-w^3)c = 0

4) Multiplions la dernière équation par w/u * j^2, les coefficients devant (1-u^3)a, (1-v^3)b et (1-w^3)c seront respectivement :

$w/u * j^2 * 1 = w/u * j^2$

$w/u.j^2 * u^3 = w.u^2.j^2 = wu^2/j = wu^2/uvw = u/v$

$w/u.j^2 * u^3v^3 = w.u^2v^3.j^2 = u.v^2 = v.uv = v.j/w = v/w.j$

Le membre de gauche est donc équivalent à E et ainsi E = 0

Or $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$ et uv, vw et wu différent de 1

Donc E = 0 ➔ **$p+jq+j^2r = 0$**

En vertu de la question 1. de la partie I on en conclut que PQR est équilatéral.

On a finalement démontré le théorème de Morley, à savoir que l'intersection des trisectrices des angles d'un triangle quelconque se coupent pour former un triangle équilatéral.