Généralisation de la notion d'intégrale

$\alpha 8 - MP^*$

1 Intégrabilité des fonctions positives

1.1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{R}^+$. f est ***intégrable*** sur I si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout segment $J \subset I$, $\int_J f \leqslant M$. Si f est intégrable, on définit $\int_I f = \sup(\int_J f)$. Si I est un segment, toute fonction $\mathcal{C}_m^0 : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est intégrable.

1.2 Intégrabilité et limite

Si I est un intervalle, on appelle suite croissante exhaustive de segments (SCES) de I toute suite de segments emboîtés $J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_n \subset \ldots$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$. Avec les notations précédentes, la suite $n \longmapsto \int_{J_n} f$ croît. f est alors intégrable ssi cette suite est majorée, auquel cas $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$.

Utilisation de la formule de Chasles : $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{R}^+$, $I = (a,b)$ (on ne précise pas l'ouverture aux bornes de I) ; soit $c \in]a,b[$, f est intégrable sur I ssi $f|_{(a,c]}$ et $f|_{[c,b)}$ le sont sur $(a,c]$ et $[c,b)$ respectivement. Dans ce cas $\int_I f = \int_{(a,c]} f + \int_{[c,b)} f$.

Corollaire : si I et I' sont deux intervalles de mêmes bornes $I' \subset I$ et $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{R}^+$, alors f est intégrable sur I ssi f est intégrable sur I'. Dans ce cas $\int_I f = \int_{I'} f$.

1.3 Opérations et estimations

- $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{R}^+$; soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. f est intégrable ssi λf l'est, auquel cas $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.
- $f, g : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{R}^+$; $f + g$ est intégrable ssi f et g le sont, auquel cas $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.
- $f, g : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{R}^+$; si $\exists M \geqslant 0 / f \leqslant Mg$ et g intégrable alors f est intégrable et $\int_I f \leqslant M \int_I g$.

2 Fonctions complexes intégrables

2.1 Définitions et modes de calcul

$f : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{C}$ est ***intégrable*** sur I si $|f|$ l'est. En particulier si $|f| \leqslant \varphi$ où $\varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{R}^+$ intégrable, alors f est intégrable.

- Soit $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{R}$ intégrable, alors f^+ et f^- sont $\mathcal{C}_m^0$ intégrables
- Soit $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{C}$ intégrable, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont $\mathcal{C}_m^0$ intégrables

2.2 Linéarité

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $l^1(I, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions intégrables $I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{K}$. C'est un sev de $\mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$, et $\int_I$ est une forme linéaire sur ce sev. $l^2(I, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions de carré intégrable.

1. Si $f, g \in l^2(I, \mathbb{K})$ alors $fg \in l^1(I, \mathbb{K})$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(f,g) \in (l^2(I,\mathbb{K}))^2 \longmapsto \int_I fg$ est un produit scalaire : $l^2(I, \mathbb{K})$ est préhilbertien.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(f,g) \in (l^2(I,\mathbb{K}))^2 \longmapsto \int_I \overline{f} g$ est un produit scalaire hermitien.
4. Si $(f,g) \in (l^2(I,\mathbb{K}))^2$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\int_I fg| \leqslant \sqrt{\int_I |f|^2 \int_I |g|^2}$.

2.3 Règles de calcul sur les intégrales

- *Règle du changement de variable* : soit I, I' deux intervalles, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{C}$ intégrable, $\varphi : I' \longrightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ est intégrable sur I' et $\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot \varphi'$.
- *Règle d'intégration par parties* : Soit I un intervalle, $I = (a,b)$, $f, g : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0, \mathcal{C}_m^1} \mathbb{C}$. Si fg' et $f'g$ sont intégrables, alors $\int_I f'g = [fg]_a^b - \int_I fg'$, où $[fg]_a^b = \lim_{x \overset{<}{\to} b} (fg)(x) - \lim_{x \overset{>}{\to} a} (fg)(x)$.

3 Théorèmes de convergence

3.1 Définitions

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble, on appelle *suite de fonctions* de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{K}$ une famille d'applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$; on la note $f_n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$. Avec ces notations, on dit que (f_n) *converge simplement vers* f si $\forall x \in \mathcal{A}$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Si $(u_n) \in (\mathbb{K}^{\mathcal{A}})^{\mathbb{N}}$, on dit que $\{u_n\}$ *converge simplement* sur $\mathcal{A}$ si $\forall x \in \mathcal{A}$, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. On peut alors définir une fonction-somme $\begin{array}{rccl} u : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \end{array}$.

3.2 Théorème de convergence dominée (théorème de Lebesgue)

I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}_m^0$ $I \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose :

1. (f_n) converge simplement vers une fonction f $\mathcal{C}_m^0$.
2. domination : $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$.

Alors :

1. Les fonctions f_n et f sont intégrables
2. $\int_I f_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to+\infty} \int_I f(x)\mathrm{d}x$.

3.3 Théorème d'intégration terme à terme

Si $u : I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{C}$, intégrable, on définit la *norme-un* de u et on note $\|u\|_1$ la quantité : $\|u\|_1 = \int_I |u(t)|\mathrm{d}t$.

Théorème : Soit (u_n) une série de fonctions $I \xrightarrow{\mathcal{C}_m^0} \mathbb{C}$ intégrable. Hypothèses :

1. Cette série converge simplement sur I et la fonction-somme u est $\mathcal{C}_m^0$.
2. La série numérique $\{\|u_n\|_1\}$ est convergente.

Alors :

1. u est intégrable sur I
2. $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$., soit : $\int_I u = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$.
3. $\|u\|_1 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_1$.

4 Intégrales à paramètres

4.1 Théorème de continuité

Énoncé 1 : Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. Hypothèses :

1. Pour tout $x \in J$ fixé, $t \in I \longmapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}_m^0$ et intégrable
2. Pour tout $t \in I$ fixé, $x \in J \longmapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^0$

3. $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall (t,x) \in I \times J$, $|f(t,x)| \leqslant \varphi(t)$

Alors la fonction $F : x \in J \longmapsto \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$ est bien définie et continue.

Énoncé 2 : A une partie d'un espace métrique, $f : I \times A \longrightarrow \mathbb{C}$. Si :

1. $\forall x \in A$, $t \in I \longmapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^0_m$ et intégrable
2. $\forall t \in I$, $x \in A \longmapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^0$ sur A
3. $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall (t,x) \in I \times A$, $|f(t,x)| \leqslant \varphi(t)$

Alors la fonction $F : x \in A \longmapsto \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur A.

On peut se limiter à établir la domination sur tous les $I \times K$ où K est un compact inclus dans A.

4.2 Théorème de dérivabilité (théorème de Leibniz)

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. Hypothèses :

1. $\forall x \in J$, $f(\bullet, x)$ est $\mathcal{C}^0_m$ et intégrable
2. il existe une application $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ définie en tout point de $I \times J$
3. $\forall x \in J$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet, x)$ est $\mathcal{C}^0_m$ et intégrable
4. $\forall t \in I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, \bullet)$ est $\mathcal{C}^0$ sur J
5. Domination : $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall (t,x) \in I \times J$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leqslant \varphi(t)$

Dans ces conditions, $F : x \in J \longmapsto \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur J et $\forall x \in J$, $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t$.

4.3 Étude de la fonction Γ

On définit : $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$. Γ est bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln^k(t)\mathrm{d}t$.
On a de plus :

- $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(1) = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
- En 0, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$.

Variations :

x	0	1	c	2	$+\infty$
$\Gamma'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Gamma(x)$	$+\infty$	$\searrow$	> 0	$\nearrow$	$+\infty$