Séries entières

$\alpha 7 - MP^*$

1 Généralités

On appelle *série entière* toute série dont le terme général est de la forme $a_n x^n$ où $x \in \mathbb{C}$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Le *domaine de convergence* d'une telle série est $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{C} / \{a_n x^n\} \text{ converge}\}$. La *fonction-somme* de la série est $S : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$.

1.1 Structure du domaine de convergence

On note $\mathrm{D}(a,b)$ la *boule ouverte* de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $b \in \mathbb{R}^+$: $\mathrm{D}(a,b) = \{z \in \mathbb{C} / |z-a| < b\}$, et $\mathrm{D}'(a,b) = \{z \in \mathbb{C} / |z-a| \leqslant b\}$.

Lemme d'Abel : soit $\{a_n x^n\}$ une série entière, $x \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R} \,\mathrm{ou}\, \mathbb{C}$. On suppose que pour $r > 0$, $a_n r^n$ est bornée. Alors $\forall z \in \mathrm{D}(0,r)$, la série $\{a_n z^n\}$ est convergente (même absolument convergente). En particulier, $\mathrm{D}(0,r) \subset \mathcal{D}$.

Corollaire : $\{a_n z^n\}$ une série entière, alors :

1. Soit $\exists R > 0 / \mathrm{D}(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \mathrm{D}'(0,R)$; R est alors unique, on l'appelle *rayon de convergence* de la série entière.
2. Soit $\mathcal{D} = \mathbb{K}$ et par extension on dit que $R = +\infty$
3. Soit $\mathcal{D} = \{0\}$ et dans ce cas $R = 0$.

1.2 Utilisation de la règle de d'Alembert

Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \lambda \in [0, +\infty[$ quand $n \longrightarrow +\infty$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$.

1.3 Combinaisons linéaires de séries entières

Soit $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence R, $\{b_n x^n\}$ de rayon de convergence R'. Soit $\{c_n x^n\}$ de rayon de convergence R'', où $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$. On a toujours $R'' \geqslant \min(R, R')$. Si de plus $R \neq R'$ et $\alpha\beta \neq 0$, alors $R'' = \min(R, R')$.

1.4 Produit de Cauchy de deux séries entières

Soit $\{a_n x^n\}$ et $\{b_n x^n\}$ deux séries entières. Leur produit de Cauchy $\{c_n x^n\}$ reste une série entière. De plus, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $R'' \geqslant \min(R, R')$.

2 Propriétés de la fonction-somme

On appelle $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ la fonction-somme dela série entière $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence R.

2.1 Continuité de la série lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si $R \in]0, +\infty]$, alors F est continue sur le disque ouvert $\mathrm{D}(0,R)$.

2.2 Classe infinie dans le cas réel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence $R > 0$; alors F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$; plus précisément, on obtient les $F^{(k)}$ en dérivant formellement les expressions $\sum a_n x^n$.

2.3 Primitivation dans le cas réel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence $R > 0$. La fonction $x \in]-R, R[\longmapsto \int_0^x F(t)\mathrm{d}t$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. On l'obtient par primitivation formelle de $\sum a_n x^n$.

2.4 Identification de séries entières

Soit deux séries $\{a_n x^n\}$ et $\{b_n x^n\}$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b tous deux non nuls. S'il existe $h > 0$ tel que

1. $]-h, h[\subset]-R_a, R_a[\bigcap]-R_b, R_b[$
2. $\forall x \in]-h, h[, \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

3 Développement en série entière

3.1 Définitions

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une fonction f est dite *développable en série entière* sur l'intervalle $]-a, a[$ $(a > 0)$ si il existe une série entière $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence $R \geqslant a$ telle que $\forall x \in]-a, a[, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit de même f développable en série entière.

3.2 Condition nécéssaire d'existence d'un développement en série entière

Soit une fonction f définie au voisinage de 0 à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour que f soit développable en série entière, il faut qu'elle soit $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

3.3 Développement en série entière de fonctions rationnelles

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \,\mathrm{ou}\, \mathbb{C}$. Toute fonction de la forme $x \overset{f}{\longmapsto} \frac{P(x)}{Q(x)}$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $Q(0) \neq 0$, est développable en série entière. Plus précisément, si (ξ_k) est la liste des zéros de Q dans $\mathbb{C}$, f est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0,a)$ où $a = \min |\xi_k| > 0$. Voir fiche sur les développements en série entière classiques.

3.4 Utilisation d'une équation différentielle

1. Soit une équation différentielle linéaire de la forme $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ où $a, b, c : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. Si a ne s'annulle pas sur I, soit φ_1 et φ_2 deux solutions de cette équation différentielle. Si $\exists x_0 \in I / \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$.
2. Soit une équation différentielle linéaire de la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + d(x) = 0$ où $a, b, c, d : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ et a ne s'annulle pas sur I. Soit φ_1 et φ_2 deux solutions de cette équation différentielle définies sur I ; si $\exists x_0 \in I / \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2(x_0) \\ \varphi_2'(x_0) \end{pmatrix}$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

On obtient ainsi des conditions sur les solutions de l'équation différentielle et parfois des séries entières solution.

Développements en série entière classiques

$\alpha 7bis - MP^*$

1 Fonctions exponentielles et trigonométriques

$$\forall x \in \mathbb{C}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{C}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{C}, \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{argth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

2 Fonctions rationnelles, puissance et logarithme

$$\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[, -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[, \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$