Séries numériques

$\alpha 6 - MP^*$

1 Généralités

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on peut lui associer $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Soit $(\sigma_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, il existe une unique suite (u_n) telle que $\sigma_n = S_n$: c'est $u_0 = \sigma_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$.

On dit que la *série* $\{u_n\}$ *converge* si la suite (S_n) converge. Lorsque c'est le cas, la *somme* de la série $\{u_n\}$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

On utilise la notation $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\sum u_n$ pour désigner la série u_n.

On appelle *reste à l'ordre* N de la série la somme $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$. On a toujours : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} R_N = 0$.

Structure d'ev, linéarité : Si $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ convergent, alors :

- $\{u_n + v_n\}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\{\lambda u_n\}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

L'ensemble des suites (u_n) telles que la série $\{u_n\}$ converge est donc un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Sur ce sev, l'application $(u_n) \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire.

Critère de Cauchy : Soit $\{u_n\}$ une série dans $\mathbb{K}$, elle converge ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \forall p > 1, |u_n + \ldots + u_{n+p}| \leqslant \varepsilon$

2 Étude des séries positives

Une série $\{u_n\}$ est *positive* si :

- $\forall n \geqslant 0, u_n \in \mathbb{R}$
- $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant 0$

2.1 Sommes partielles et convergence

(u_n) une série positive, (S_n) associée à (u_n). Alors (S_n) croît. La série $\{u_n\}$ est convergente ssi la suite (S_n) est majorée.

2.2 Règles de comparaison

1. Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux séries positives, telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
   - Si $\{v_n\}$ converge alors $\{u_n\}$ converge
   - Si $\{u_n\}$ diverge alors $\{v_n\}$ diverge
2. Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux séries positives. Si $u_n \sim v_n$, les deux séries sont de même nature.

2.3 Sommation des relations de comparaison

Soit deux suites réelles positives (u_n) et (v_n) de sommes partielles respectives (S_n) et (S'_n).

1. Si $\{v_n\}$ diverge et $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{O}(S'_n)$.
2. Si $\{v_n\}$ diverge et $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{o}(S'_n)$.
3. Si $\{v_n\}$ diverge et $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim S'_n$.

Soit R_n et R'_n les restes à l'ordre n respectifs de (u_n) et (v_n)

1. Si $\{v_n\}$ converge et $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $\{u_n\}$ converge et $R_n = \mathrm{O}(R'_n)$.
2. Si $\{v_n\}$ converge et $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\{u_n\}$ converge et $R_n = \mathrm{o}(R'_n)$.
3. Si $\{v_n\}$ converge et $u_n \sim v_n$, alors $\{u_n\}$ converge et $R_n \sim R'_n$.

2.4 Règle de d'Alembert

$\{u_n\}$ série réelle strictement positive pour n assez grand.

1. Si $\exists k < 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ pour n assez grand, alors $\{u_n\}$ converge
2. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite $l < 1$, alors $\{u_n\}$ converge
3. Si $\exists k \geqslant 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k$ pour n assez grand, alors $\{u_n\}$ diverge
4. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite $l > 1$, alors $\{u_n\}$ diverge
5. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{\geqslant} 1$, alors $\{u_n\}$ diverge

Aucune réciproque, aucun résultat si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{\leqslant} 1$.

2.5 Comparaison entre série et intégrale

$f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \ \mathcal{C}^0_m$, décroissante. Pour $n \geqslant n_0$, soit $u_n = f(n)$.

1. Les séries de terme général $v_n = u_n - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ et $v'_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - u_n$ sont positives et convergentes.
2. La suite de terme général $A_n = u_{n_0} + \ldots + u_n - \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
3. $\{u_n\}$ converge ssi $n \longmapsto \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie.

2.6 Règle de Riemann

$\{u_n\}$ une série réelle positive

1. Si $\exists \alpha > 1$ tel que $u_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n^\alpha})$ alors u_n converge.
2. Si $\exists \alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n$ ait une limite l finie, alors $\{u_n\}$ converge.
3. Si $\exists \alpha \leqslant 1$ et $m > 0$ tel que $n^\alpha u_n \geqslant m$ pour n assez grand, alors $\{u_n\}$ diverge.
4. Si $\exists \alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n$ admette une limite éventuellement infinie, alors $\{u_n\}$ diverge.
5. Si $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ avec $A > 0$, alors $\{u_n\}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Pas de réciproque à ces règles.

Séries de Bertrand : $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^b(n)}$ pour $n \geqslant 2$. $\{u_n\}$ converge ssi $(a, b) \succ (1, 1)$ (ordre lexicographique).

Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

3 Règles sur les séries générales

3.1 Règle des séries alternées

$\{u_n\}$ est *alternée* si ses termes sont réels et si $(-1)^n u_n$ a un signe constant pour n assez grand.

Soit (u_n) une suite réelle ; on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$:

1. $n \longmapsto |u_n|$ décroît
2. $n \longmapsto (-1)^n u_n$ est de signe constant

Alors :

1. $\{u_n\}$ converge
2. $\forall n \geqslant n_0, |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

3.2 Séries absolument convergentes

$\{u_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite *absolument convergente* si la série réelle positive $\{|u_n|\}$ converge. Dans ce cas $\{u_n\}$ converge et on a l'inégalité triangulaire : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$. Si $\{u_n\}$ est absolument convergente, elle satisfait le critère de Cauchy. Une série convergente mais non absolument convergente est dite *semi-convergente*.

3.3 Utilisation des développements limités

La forme générale d'un développement asymptotique est $u_n = u_n^{(1)} + u_n^{(2)} + \ldots + u_n^{(p)} + \mathrm{O}(u_n^{(p+1)})$. On peut conclure grâce à un développement limité en matière de séries lorsqu'on termine par $\mathrm{O}(u_n^{(p+1)})$ où $\{u_n^{(p+1)}\}$ est absolument convergente.

3.4 Transformation d'Abel

On transforme une somme finie $S_n = a_0 b_0 + \ldots + a_n b_n$ comme il suit : $\mathcal{B}_0 = b_0$, $\mathcal{B}_1 = b_0 + b_1, \ldots, \mathcal{B}_n = b_0 + \ldots + b_n$.On a alors $S_n = a_0\mathcal{B}_0 + a_1(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_0) + \ldots + a_n(\mathcal{B}_n - \mathcal{B}_{n-1})$. On réécrit cette somme $S_n = \mathcal{B}_0(a_0 - a_1) + \ldots + \mathcal{B}_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n\mathcal{B}_n$. Les sommes paritelles de la série $\{a_n b_n\}$ sont donc celles de la série $\{\mathcal{B}_n(a_n - a_{n-1})\}$ au terme correctif près $a_n\mathcal{B}_n$.

4 Opérations sur les séries numériques

4.1 Produit de Cauchy

Soit $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ et $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ deux séries ; on définit leur *produit de Cauchy* par : $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Si $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont absolument convergentes, $\{w_n\}$ est absolument convergente et $(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} w_n$.

4.2 Sommation par paquets

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, posons : $v_n = u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)+1} + \ldots + u_{\varphi(n+1)-1}$. Alors si $\{u_n\}$ converge, $\{v_n\}$ converge également et a même somme.

Réciproque : si

1. $\{v_n\}$ converge
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
3. $n \longmapsto \varphi(n+1) - \varphi(n)$ est majorée

alors $\{u_n\}$ converge.

4.3 Permutation des termes (hors programme)

Soit $\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{bijective} \mathbb{N}$, $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ une série et $\{v_n = u_{\sigma(n)}\}_{n\geqslant 0}$.

1. Si $\{u_n\}$ est absolument convergents, alors $\{v_n\}$ est absolument convergente et a même somme
2. Si au contraire $\{u_n\}$ est semi-convergente, alors $\exists\sigma/\{v_n\}$ diverge
3. Si $\{u_n\}$ est semi-convergente, alors $\forall S \in \mathbb{R}$, $\exists\sigma/\{v_n\}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_n = S$

5 Séries doubles

5.1 Position du problème

On cherche à donner un sens à $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et surtout à changer l'ordre de sommation.

5.2 Cas des familles positives

Soit une suite double $u_{p,q} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. On dit que $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens si

1. $\forall p \in \mathbb{N}$, la série de terme général $q \longmapsto u_{p,q}$ converge
2. La série positive de terme général $p \longmapsto \sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ converge

Dans ces conditions, on désigne par $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$ la somme de ces séries.

Propriété : $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens ssi $\sum\limits_{q=0}^{+\infty}(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens. En outre, si elles sont définies, ces deux séries doubles on même somme.

5.3 Cas général

$(u_{p,q}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une série double. On dit que cette série (ou suite) est *sommable* si la suite positive $(|u_{p,q}|)$ satisfait $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}}\sum\limits_{q\in\mathbb{N}} |u_{p,q}|$ (ou $\sum\limits_{q\in\mathbb{N}}\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} |u_{p,q}|$) a un sens. Dans ces conditions, $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens, $\sum\limits_{q=0}^{+\infty}(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens et ces deux séries ont même somme.