Réduction des endomorphismes

$\alpha 4 - MP^*$

1 Généralités

1.1 Éléments propres

E un $\mathbb{K}-$ev, $u \in \mathcal{L}(E)$

- $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0$ et si $\exists \lambda \in \mathbb{K}/u(x) = \lambda x$. Dans ce cas λ est unique et on l'appelle *valeur propre* de u associée à x.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si $\exists x \in E, x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. On dit que x est un *vecteur propre* associé à λ.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id)$. λ est valeur propre de u ssi $E_\lambda \neq 0$. E_λ est le *sous-espace vectoriel propre* associé à λ.
- L'ensemble des valeurs propres s'appelle le *spectre* de u, noté $\mathrm{Sp}\,(u)$.

1.2 Théorème d'indépendance linéaire

E un ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{I}$ ensemble d'indice éventuellement fini.

- Si $(\lambda_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une famille de scalaires 2 à 2 différents, alors les E_{λ_i} sont en somme directe.
- Si $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 différentes, alors cette famille est libre.

Corollaire : si E est de dimension finie n, alors $\mathrm{card}\,\mathrm{Sp}\,(u) \leqslant n$.

1.3 Diagonalisabilité

E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable si $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $M_{\mathcal{B}}u$ soit diagonale.

1. u est diagonalisable ssi
2. $\exists (a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille de scalaires telle que $E = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} E_{a_i}$ ssi
3. $E = \bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} E_\lambda$.

Remarque : (1.) $\Longleftrightarrow$ (2.) est vrai même en dimension infinie.

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $u : X \longmapsto MX$, X est un vecteur propre de M ssi X est un vecteur propre de u ; de même pour les valeurs propres, les sous-espaces propres.

M est diagonalisable ssi M est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire : M est diagonalisable ssi $\exists D$ diagonale, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PDP^{-1}$.

2 Le polynôme caractéristique

2.1 Définition de χ_u

E un ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$. $\chi_u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(u - \lambda Id) \end{array}$. χ_u est une fonction polynômiale de degré n de la forme : $\chi_u = (-1)^n(X^n - \mathrm{tr}\,(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u)$.

Propriété : les valeurs propres de u sont les zéros de χ_u.

λ est une valeur propre de *multiplicité* p si c'est un zéro p-uple de χ_u.

On dit que u est *scindé* si χ_u l'est. Dans ces conditions, soit $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, m_i la multiplicité de la valeur propre λ_i, on a $\mathrm{tr}\,u = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i\lambda_i$ et $\det u = \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^{m_i}$.

2.2 Lien entre $\chi_u$et les sous-espaces propres

E un ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$, si λ est un zéro p-uple de χ_u alors $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant p$.

2.3 Premières conditions de diagonalisabilité

E de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$; on a les conditions suivantes pour que u soit diagonalisable :

1. C.N :u scindé
2. C.S : χ_u possède n racines (χ_u est *séparablement scindé*)
3. C.N.S : u est scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u), \dim E_\lambda = \mathrm{mult}\,(\lambda)$

2.4 Réduction des endomorphismes monogènes

E ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit *monogène* si $\exists x \in E/\mathcal{B} = (x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ base de E. Soit alors $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}u = \begin{pmatrix} 0 & & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ où $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$. Soit $P = X^n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, alors $\chi_u = (-1)^n P$. M est appelée *matrice-compagnon* du polynôme P.

- Si u est monogène, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, $\dim E_\lambda = 1$.
- Dans ce cas, u est diagonalisable ssi χ_u est séparablement scindé.

2.5 Remarques

En toute généralité, $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \chi_M = \chi_{{}^tM}$ et $\forall (M, N) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2, \chi_{MN} = \chi_{NM}$.

3 Réduction des endomorphismes autoadjoints

3.1 Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques)

Soit E ev réel euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est *symétrique* si $\forall (x, y) \in E^2, (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$.

Propriété : $\mathcal{B}$ une BON, u est symétrique ssi $M_{\mathcal{B}}u$ est une matrice symétrique.

3.2 Lemmes

1. Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Soit F sev de E stable par u $(u(F) \subset F)$; alors $F^\perp$ est stable par u.
2. Soit E un $\mathbb{R}-$ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un sev F de E non nul de dimension $\leqslant 2$ stable par u.
3. Soit E un ev euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors χ_u possède au moins un zéro réel

3.3 Le théorème spectral

E ev euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors :

1. u est scindé
2. plus précisément, u est diagonalisable
3. $\exists B$ BON telle que $M_{\mathcal{B}}u$ soit diagonale

Corollaires :

- Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 différentes sont 2 à 2 orthogonaux
- Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors :
  1. M est scindé
  2. M est diagonalisable
  3. $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})/P^{-1}MP$ soit diagonale.

4 Applications de la diagonalisation

4.1 Première méthode de calcul de puissance

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si M est diagonalisable, on construit $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$ (voire $k \in \mathbb{Z}$ si M est inversible.)

Puissances d'un endomorphisme : même principe en dimension finie. Si $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, alors $\exists!(u_1, \ldots, u_r) \in \mathcal{L}(E)^r$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, u^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k u_i$. Si P_i est un polynôme tel que $P_i(u_j) = \delta_{i,j}$, alors $u_i = P_i(u)$. En outre, u_i est le projecteur associé à E_{λ_i}.

4.2 Résolution des systèmes différentiels à coefficients constants

Un *système différentiel à coefficients* constants est de la forme : $X' = MX + A(t)$ où $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$, $A : t \in I \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix}$ où les a_i sont $\mathcal{C}^0$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. L'inconnue est la fonction $t \in I \longrightarrow X(t)$ dérivable. Si M est diagonalisable, $M = PDP^{-1}$ et $(X' = MX + A(t)) \Longleftrightarrow (Y' = DY + B(t))$ avec $X = PY$ et $A(t) = PB(t)$, plus simple à résoudre.

5 Triangulation des endomorphismes

E ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ est *triangulable* si $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire.

5.1 Théorème de triangulabilité

Avec ces notations, u est triangulable ssi u est scindé.

Lemme : si $u \in \mathcal{L}(E)$ est scindé et G stable par u, alors $u|_G^G$ est scindé.

5.2 Applications

- système différentiel à coefficients constants
- Si E est de dimension finie et si u est scindé, alors u est nilpotent ssi $\mathrm{Sp}\,u = \{0\}$

5.3 Méthodes de triangulation

- E un ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ scindé, $\mathrm{Sp}\,u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Si $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,u} E_\lambda$ est de dimension $n-1$, on construit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E adaptée à cette somme directe (hormis e_n choisi). On a alors : $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & m_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_r & \vdots \\ & & & m_{n,n} \end{pmatrix}$.

  On obtient la dernière colonne en décomposant $u(e_n) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n} e_i$.
- Cas où $\dim E = 2$, u scindé non diagonalisable. u a alors une valeur propre double λ et $\dim E_\lambda = 1$. On adapte une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E et on a :$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$.
- Cas où $\dim E = 3$, u scindé non diagonalisable.
  - $*$ cas 1 : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\mathrm{mult}(\lambda) = 2$, $\mathrm{mult}(\mu) = 1$. $E = \ker(u - \lambda Id)^2 \oplus \ker(u - \mu Id)$, $\dim E_\lambda = \dim E_\mu = 1$. Soit $E_\lambda' = \ker(u - \lambda Id)^2$, on choisit $e_1 \in E_\lambda' \backslash E_\lambda$, $e_2 = (u - \lambda Id)(e_1)$, $e_3 \in E_\mu \backslash \{0\}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Alors $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.
  - $*$ cas 2 : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$, $\dim E_\lambda = 2$. On pose $v = u - \lambda Id$. $\chi_u = (\lambda - X)^3$ et $\chi_u(u) = 0$ montre que $v^3 = 0$. On choisit $e_1 \notin \ker v$, $e_2 = v(e_1) \in \ker v$, et on complète en une base (e_2, e_3) de $\ker v$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
  - $*$ cas 3 : (mêmes notations) $\dim E_\lambda = 1$, on suppose $\dim \ker v^2 = 3$. $\exists \mathcal{P}$ plan vectoriel tel que $\ker v^2 = \ker v \oplus \mathcal{P}$. En posant $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base de $\mathcal{P}$, on aboutit à une absurdité. Donc $\dim \ker v^2 = 2$; on choisit $e_1 \notin \ker v$, $e_2 = v(e_1)$, $e_3 = v(e_2)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$; alors $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

6 Polynômes et réduction

6.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Soit E ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, on a : $\chi_u(u) = 0$.

Soit μ_u le *polynôme minimal* de u, c'est-à-dire le polynôme unitaire de degré minimal tel que $\mu_u(u) = 0$.

Propriété : $\chi_u \mid \mu_u^n$.

6.2 Polynômes et spectre

E ev quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P(u) = 0$, alors les valeurs propres de u sont à chercher parmi les zéros de P : $\mathrm{Sp}(u) \subset P^{-1}(\{0\})$. En particulier, les valeurs propres de u sont les zéros de μ_u.

6.3 Polynômes et diagonalisabilité

E ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable ssi μ_u est scindé à zéros simples ssi $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ non nul scindé à zéros simples tel que $P(u) = 0$.

6.4 Polynômes et triangulabilité

E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est triangulable ssi u est scindé ssi μ_u est scindé ssi $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ non nul scindé tel que $P(u) = 0$.

6.5 Polynômes et calcul de puissance

E ev quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose connu $P \in \mathbb{K}[X]$non nul tel que $P(u) = 0$. Soit $P' \in \mathbb{K}[X]$, l'identité de division euclidienne $P' = PQ + R$ avec $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\deg R < \deg P$ montre que $P'(u) = P(u) \circ Q(u) + R(u) = R(u)$. Pour évaluer $P'(u)$, il suffit de connaître les $u^k, 1 \leqslant k < \deg P$.

7 Sous-espaces stables

7.1 Lien avec les polynômes annulateurs

E un ev quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E stable par u, $v = u|_F^F$, $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $P(u) = 0$, on a aussi $P(v) = 0$.
- $\chi_v \mid \chi_u$.

7.2 Lien avec la diagonalisabilité

E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est diagonalisable et si F est un sev stable alors $u|_F^F$ est encore diagonalisable.

Corollaire : E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Un sev F de E est stable par u ssi il est de la forme $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ où $\forall i$, F_i est un sev de E_{λ_i}.

7.3 Lien avec la triangulation

E un ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ scindé. Si F est un sev stable, alors $u|_F^F$ reste scindé et triangulable.

Remarque 1 : décomposition de Dumford d'un endomorphisme scindé. $u \in \mathcal{L}(E)$ scindé, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. $m_i = \mathrm{mult}(\lambda_i)$, $E'_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i Id)^{m_i}$.

1. $\forall i$, E'_{λ_i} est stable par u ; on pose $v_i = u|_{E'_{\lambda_i}}^{E'_{\lambda_i}}$; alors $v_i - \lambda_i Id|_{E_{\lambda_i}}$ est nilpotent.

2. $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E'_{\lambda_i}$; il existe une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme directe telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale par bloc. $M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(T_1, \ldots, T_r)$ où chaque T_i est de la forme $T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ & \ddots & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$.

Remarque 2 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists!(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2 / u = d + n$ où d est diagonalisable et n est nilpotent.

7.4 Hyperplans stables

E ev de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{H}$ hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. Soit $M = M_{\mathcal{B}}(u)$, $\mathcal{H}$ est stable par u ssi $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tM$. Si M est connue, on obtient ainsi tous les hyperplans stables en cherchant les vecteurs propres de ${}^tM$.

8 Commutants d'un endomorphisme

8.1 Généralités

E de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / v \circ u = u \circ v\}$. $C(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathbb{K}[u] \subset C(u)$. De plus, si $\dim E = n$,

- $1 \leqslant \dim \mathbb{K}[u] \leqslant n \leqslant \dim C(u) \leqslant n^2$
- $(\dim \mathbb{K}[u] = n) \Longleftrightarrow (\dim C(u) = n)$
- $\dim C(u) \equiv n \bmod 2$
- si $n = 3$, $\dim C(u) \in \{3, 5, 9\}$.

8.2 Lien avec la diagonalisabilité

E ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. $v \in C(u)$ ssi v laisse stable tous les E_{λ_i}.

8.3 $\dim E = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R} \,\mathrm{ou}\, \mathbb{C}$

$u \in \mathcal{L}(E)$ scindé non diagonalisable. On peut réduire $M_{\mathcal{B}}(u)$, $\mathcal{B}$ bien choisie, à l'une des formes suivantes :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 1 & \lambda & \\ \hline & & \mu \end{array}\right),\ M_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 1 & \lambda & \\ \hline & & \lambda \end{array}\right) \text{ ou } M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Pour $v \in \mathcal{L}(E)$, $uv = vu$ ssi $M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M_{\mathcal{B}}(v)$ commutent. Chercher $M_{\mathcal{B}}(v)$ avec 9 coefficients indéterminés conduit à des calculs simples.