Espaces vectoriels

$\alpha 2 - MP^*$

1 Espaces vectoriels

1.1 Sommes et sommes directes finies

E est un espace vectoriel

- $f \in \mathcal{L}(E)$, $E = K \oplus \ker f$; alors $f|_K$ est un isomorphisme de K sur $\mathrm{Im}(f)$
- Soit E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\exists F/E = \ker f \oplus F$ et $f(F) \subset F$, alors $F = \mathrm{Im}\, f$.
- *Projecteurs* : soit E un ev, $p \in \mathcal{L}(E)$,
  1. Si $p \circ p = p$ alors $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p$ et $\mathrm{Im}\, p = \ker(p - Id)$; p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèllement à $\ker p$.
  2. Si $E = F \oplus G$, alors $p : x = x_G + x_F \longrightarrow x_F$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ vérifie $p \circ p = p$, $\mathrm{Im}\, p = F$ et $\ker p = G$. C'est le projecteur sur F parallèllement à G.
- *Symétries* : soit $E = F \oplus G$ un ev sur $\mathbb{K}$. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s : x = x_F - x_G$. Si $\mathrm{carac}(\mathbb{K}) = 2$ alors $s = Id$. Sinon, $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie ssi (def) $s \circ s = Id$. Dans ce cas $E = \ker(s - Id) \oplus \ker(s + Id)$.
- Notons $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques. Alors $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.

1.2 Sommes quelconques

Soit E un ev, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev. $\sum\limits_{i \in I} F_i$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}$ où $k \in \mathbb{N}$ et $\forall j, i_j \in I$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. $\sum F_i$ est un sev de E. $\sum\limits_{i \in I} F_i = \mathrm{Vect}(\bigcup\limits_{i \in I} F_i)$.La somme est directe si : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i_1, \ldots, i_k$ 2 à 2 $\neq, (\sum x_{i_j} = 0) \Longrightarrow (\forall j, x_{i_j} = 0)$.

1.3 Homothéties

- Soit E un ev, $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une homothétie ssi $f \in \mathrm{Vect}(Id)$ ssi $\forall x \in E, (x, f(x))$ est liée.
- Soit E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
  1. Si $\forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f$ alors $f \in \mathrm{Vect}(Id)$
  2. Si $\forall g \in \mathrm{GL}(E), f \circ g = g \circ f$ alors $f \in \mathrm{Vect}(Id)$
  3. Si de plus E est euclidien, alors : Si $\forall g \in \mathcal{O}(E), f \circ g = g \circ f$ alors $f \in \mathrm{Vect}(Id)$

1.4 Hyperplans

- Soit E un ev, F sev de E est un *hyperplan* si $\exists D = \mathrm{Vect}(x_0)/E = F \oplus D$. Si de plus E est de dimension finie, F est un hyperplan ssi $\dim E = \dim F + 1$.
- F est un hyperplan de E ssi $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \varphi \neq 0$ telle que $F = \ker \varphi$.
- Soit E un ev, H hyperplan de E, $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker \varphi$. Soit $H^\circ \overset{def}{=} \{\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})/H = \ker \psi\}$. Alors $H^\circ = \mathrm{Vect}(\varphi)$.
- *Codimension* : on dit que F sev de E est de *codimension finie* s'il possède un supplémentaire G de dimension finie. Dans ce cas on pose $\mathrm{codim}\, F = \dim G$

1.5 Résultats propres à la dimension finie

- *Formule de Grassman* : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \bigcap G)$.
- $\dim E = \dim F + \mathrm{codim}\, F$.
- *Formule du rang* : $\forall f \in \mathcal{L}(E), \dim E = \mathrm{rg}\, f + \dim \ker f$.
- $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$
- $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

2 Dualité

1. Si E est un $\mathbb{K}-$ev, on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ son *dual*.
2. On a une forme bilinéaire $\begin{array}{ccc} E^* \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f, x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$, notée aussi $(f \mid x)$.

2.1 Cas où E est de dimension finie

- $\dim E^* = \dim E$
- Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on peut lui associer une base $\mathcal{B}^* = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E^* (*base duale* de $\mathcal{B}$) telle que pour tout $x = \sum x_i e_i$, on a $\varepsilon_i(x) = x_i$. ε_i est la i-ième forme coordonnée sur $\mathcal{B}$.
- Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases de E, $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors ${}^tP = \mathcal{M}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}$.

2.2 Base antéduale

- Toute base $\mathcal{C}$ de E^* est la duale d'une unique base $\mathcal{B}$ de$E$ (son *antéduale*).
- E un ev de dimension n finie. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_r)$ une famille de r formes linéaires. $\mathcal{F}$ engendre E^* ssi $\bigcap\limits_{i=1}^{r} \ker f_i = \{0\}$.

2.3 Orthogonalité entre E et E^*

- E un ev. Si $\mathcal{P} \subset E$, on note $\mathcal{P}^\circ = \{f \in E^*/\forall x \in \mathcal{P}, f(x) = 0\}$.
  1. $\mathcal{P}^\circ$ est un sev de E^*
  2. $(\mathrm{Vect}\, \mathcal{P})^\circ = \mathcal{P}^\circ$
  3. Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ alors $\mathcal{Q}^\circ \subset \mathcal{P}^\circ$
- Si E est de dimension finie, F sev de E, alors $\dim F^\circ = \mathrm{codim}\, F$
- Soit E un ev, si $\mathcal{P} \subset E^*$, on note $\mathcal{P}^\circ = \{x \in E/\forall f \in \mathcal{P}, f(x) = 0\}$.
  1. $\mathcal{P}^\circ$ est un sev de E
  2. $(\mathrm{Vect}\, \mathcal{P})^\circ = \mathcal{P}^\circ$
  3. Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q} \subset E^*$ alors $\mathcal{Q}^\circ \subset \mathcal{P}^\circ$
  4. Si E est de dimension finie, F sev de E^*, alors $\dim F^\circ = \mathrm{codim}\, F$
- E de dimension finie, F sev de E, alors $F^{\circ\circ} = F$ (même énoncé si F sev de E^*).

3 Théorème de décomposition des noyaux

Notations : si E est un ev, $\mathcal{L}(E)$ est une $\mathbb{K}-$algèbre. Si $P = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors on pose $P(u) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i u^i$ en convenant $u^0 = Id$. $(P(u))(x)$ est noté $P(u)(x)$.

3.1 Premières propriétés

- E ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

  1. Si $P \mid Q$ alors $\ker P(u) \subset \ker Q(u)$ et $\operatorname{Im} P(u) \supset \operatorname{Im} Q(u)$
  2. Si $D = P \wedge Q$, $\ker P(u) \bigcap \ker Q(u) = \ker D(u)$.

- Soit $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, alors : $\sum\limits_{i=1}^{m} \ker P_i(u)$ est directe.

3.2 Théorème de décomposition des noyaux

E ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entre eux ; soit $P = \prod\limits_{i=1}^{m} P_i$. Alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker P_i(u).$$