Intégrales doubles

$\alpha 20 - MP^*$

1 Notion d'intégrale double sur un produit d'intervalles

1.1 Formule de Fubini

Soit $f : [a,b] \times [c,d] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, alors :

1. $\forall x \in [a,b], \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ a un sens
2. $x \longmapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$
3. $\forall y \in [c,d], \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ a un sens
4. $y \longmapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[c,d]$
5. $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

1.2 Intégrabilité d'une fonction positive

Soient I, J deux intervalles de longueur non vide, $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}^+$. f est *intégrable* si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout couple de segments $(I_0 \subset I, J_0 \subset J)$, on a :

$$\int\int_{I_0 \times J_0} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant M$$

Dans ce cas, $\int\int_{I\times J} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \sup \int\int_{I_0\times J_0} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. soit I_n une suite croissante exhaustive de segments (SCES) de I, J_n une SCES de J, alors $n \longmapsto \int\int_{I_n \times J_n} f$ croît ; si cette suite est majorée, f est intégrable et $\int\int_{I\times J} f = \lim \int\int_{I_n\times J_n} f$.

Propriété : Soit $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}^+$. On suppose que :

1. $\forall x \in I, y \in J \overset{\mathcal{C}^0}{\longmapsto} f(x,y)$ est intégrable
2. $F : x \in I \longmapsto \int_J f(x,y)\mathrm{d}y$ est $\mathcal{C}^0_m$

Alors f est intégrable sur $I \times J$ ssi F l'est sur I et, le cas échéant, $\int\int_{I\times J} f = \int_I F$.

1.3 Cas général

$f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$; f est *intégrable* si $|f|$ l'est.

Si $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$ est intégrable, alors f^+ et f^- le sont et : $\int\int_{I\times J} f = \int\int_{I\times J} f^+ - \int\int_{I\times J} f^-$.

Si $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ est intégrable, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et : $\int\int_{I\times J} f = \int\int_{I\times J} \mathrm{Re}(f) + i \int\int_{I\times J} \mathrm{Im}(f)$.

Propriété : Soit $f : I \times J \overset{\mathcal{C}^0}{\longmapsto} \mathbb{C}$ intégrable. On suppose que :

1. $\forall x \in I, y \in J \overset{\mathcal{C}^0}{\longmapsto} f(x,y)$ est intégrable
2. $F : x \in I \longmapsto \int_J f(x,y)\mathrm{d}y$ est $\mathcal{C}^0_m$

Alors f est intégrable sur $I \times J$ ssi F l'est sur I et, le cas échéant, $\int\int_{I\times J} f = \int_I F$.

1.4 Propriétés de l'intégrale double

1. **Linéarité** : ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) l'ensemble des fonctions $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}$ intégrables est un sev de $\mathcal{C}^0(I \times J, \mathbb{K})$. Sur ce sev, $f \longmapsto \int\int_{I\times J} f$ est linéaire.
2. **Inégalité triangulaire** : Soit $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}$, alors : $|\int\int f| \leqslant \int\int |f|$.
3. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : Soit $f, g : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}$. Si f^2 et g^2 sont intégrables, alors fg est intégrable et $\int\int |fg| \leqslant \sqrt{\int\int |f|^2 \int\int |g|^2}$
4. **Majorations** : $f, g : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}$. Si $\exists M / \forall (x,y) \in I \times J, |f(x,y)| \leqslant M|g(x,y)|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f et, si g est intégrable, on a : $\int\int |f| \leqslant M \int\int |g|$.

2 Intégrales doubles sur des compacts élémentaires

2.1 Définitions

On appelle *compact élémentaire* (CE) de $\mathbb{R}^2$ une partie de $\mathbb{R}^2$ définie de deux façons par un système d'inéquations :

$$a \leqslant x \leqslant b$$
$$\forall x \in [a,b], \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$$

et :

$$c \leqslant y \leqslant d$$
$$\forall y \in [c,d], \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

où les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont continues sur leur intervalle de définition.

2.2 Propriétés

Soit C un CE de $\mathbb{R}^2$, et $f : C \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, alors :

$$\int_a^b (\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \int_c^d (\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$$

La valeur de ces deux termes est par définition : $\int\int_C f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2.3 Cas d'une réunion de compacts élémentaires

$C \subset \mathbb{R}^2$ est un *compact usuel* (CU) si on peut l'écrire $C = \bigcup_{k=1}^n C_k$ où les $(C_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont des CE vérifiant $\forall i \neq j, \mathring{C}_i \bigcap \mathring{C}_j = \varnothing$.

Dans ce cas, on a : $\int\int_C f = \sum_{k=1}^n \int\int_{C_i} f$.

2.4 Changement de variables

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme, $C \subset \Omega$ un CU. On suppose que $\varphi(C) = C'$ est encore un CU. Soit $f : C' \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$. Alors :

$$\int\int_{C'} f = \int\int_C f \circ \varphi \times |\det J\varphi|$$

3 Passage en coordonnées polaires

3.1 Cas d'un produit d'intervalles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$; on pose $g : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ telle que $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors f est intégrable ssi g l'est, et dans ce cas

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} g(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

3.2 Cas d'un compact usuel

Soit C un CU inclus dans $\mathbb{R}^+ \times [\alpha, \alpha + 2\pi]$, on suppose que $C' = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/(r,\theta) \in C\}$ est un CU de $\mathbb{R}^2$. Si $f : C' \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors :

$$\int\int_{C'} f = \int\int_C f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta.$$

4 Notion d'aire

4.1 Aire d'un compact usuel

L'*aire* d'un CU C est par définition $\int\int_C 1 \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4.2 Aires gauches

Soit E un espace affine euclidien orienté (de dimension 3). Soit une surface S de classe $\mathcal{C}^{k \geqslant 1}$, définie par $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow E$. Si C est un CU inclus dans Ω, on définit l'aire de $\varphi(C)$ comme :

$$\int\int_C \|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$