Fonctions de plusieurs variables réelles

$\alpha 16 - MP^*$

Soit E, E' deux $\mathbb{R}-$evnf, on considère les fonctions $f : A \subset E \longrightarrow E'$.

1 Classe d'une fonction

1.1 Notion de limite en un point

$f : A \subset E \longrightarrow E'$; soit $x \in \overline{A}$, on dit que $l = \lim\limits_{y \to x} f(y)$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / [(y \in A) \wedge (\|y - x\| \leqslant \alpha)] \Longrightarrow (\|f(y) - l\| \leqslant \varepsilon)$. Si cette limite existe, elle est unique. $l = \lim\limits_{y \to x} f(y)$ ssi pour toute suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}} / \lim y_n = x$, alors $\lim f(y_n) = l$.

1.2 Différentiabilité d'une application

Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow E'$; f est *différentiable* en $x_0 \in \Omega$ si il existe $l \in \mathcal{L}(E, E')$ telle que $f(x_0+h) = f(x_0)+l(h)+\vec{o}(h)$, avec $\|\vec{o}(h)\| = \mathrm{o}(h)$. l est alors unique : c'est la *différentielle* de f en x_0, ou *application linéaire tangente* à f en x_0. On note $l = \mathrm{d}f_{x_0}$ ou $\mathrm{d}_{x_0} f$ ou $(\mathrm{d}f)_{x_0}$.

- Si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0.
- Si E et E' ne sont pas de dimension finie, on impose de plus $l \in \mathcal{L}_C(E, E')$.
- $\forall h$, $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$ s'appelle aussi *dérivée de f selon le vecteur h.*

On dit que f est *différentiable sur* Ω si elle l'est en tout point de Ω. On peut alors définir $\mathrm{d}f : x \in \Omega \longmapsto \mathrm{d}f_x \in \mathcal{L}(E, E')$. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ si cette application est encore continue. Si $\mathcal{B} = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base de E', on peut écrire $f : x \in \Omega \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) e'_i$. f est alors différentiable ssi chaque f_i l'est. Dans ce cas $(\mathrm{d}f_i) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{d}f_i)_{x_0}(h) e'_i$.

1.3 Propriétés

1. Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et $f : I \longrightarrow E'$. Si $x_0 \in I$, f est différentiable en x_0 ssi $f'(x_0)$ existe. Dans ce cas $\mathrm{d}f_{x_0} : h \longmapsto h \cdot f'(x_0)$.
2. Soit Ω un ouvert de E, $f, g : \Omega \longrightarrow E'$. Si $\mathrm{d}f_{x_0}$ et $\mathrm{d}g_{x_0}$ existent pour $x_0 \in \Omega$ fixé, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)_{x_0}$ existe et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \lambda \mathrm{d}f_{x_0} + \mu \mathrm{d}g_{x_0}$.
3. Soit $1 \leqslant i \leqslant m$, $f_i : \Omega \longrightarrow E_i$ ((E_i) une famille d'evnf, Ω ouvert de E) ; $\mathcal{B} : \prod\limits_{i=1}^{m} E_i \longrightarrow E'$ $m-$linéaire. Si les $(\mathrm{d}f_i)_{x_0}$ existent toutes en $x_0 \in \Omega$, $F : x \in \Omega \longmapsto \mathcal{B}(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ est différentiable en x_0 et
$$(\mathrm{d}F)_{x_0} : h \longmapsto \mathcal{B}((\mathrm{d}f_1)_{x_0}(h), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0)) + \ldots + \mathcal{B}(f_1(x_0), \ldots, f_{n-1}(x_0), (\mathrm{d}f_n)_{x_0}(h)).$$
4. $f : \Omega \subset E \longrightarrow E'$, $g : \Omega' \subset E' \longrightarrow E''$ telle que $f(\Omega) \subset \Omega'$. Soit $x_0 \in \Omega$, si $\mathrm{d}f_{x_0}$ existe et $\mathrm{d}g_{f(x_0)}$ existe, alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et $\mathrm{d}(g \circ f)_{x_0} = (\mathrm{d}g)_{f(x_0)} \circ (\mathrm{d}f)_{x_0}$. (De même si f et g sont $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$).

1.4 Dérivées partielles

Soit un envf E rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow E'$ evnf. Si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on écrira $f(x_1, \ldots, x_n)$ pour désigner $f(x)$. Soit $X_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, on définit $\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)$ par la limite, si elle existe, de $\frac{f(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t}$ lorsque $t \longrightarrow 0$. C'est aussi $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(X_0+te_1)-f(X_0)}{t}$, ou encore $\varphi'(0)$ si φ est définie par $t \xrightarrow{\varphi} f(x_1+t, x_2, \ldots, x_n)$. On définit de même les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Si $\mathrm{d}f_{X_0}$ existe alors toutes les $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ existent et $\forall i$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \mathrm{d}f_{X_0}(e_i)$. Si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont définies et continues en tout point de Ω, alors f est différentiable sur Ω ; plus précisément, $X \in \Omega \longmapsto \mathrm{d}f_X \in \mathcal{L}(E, E')$ est continue (c'est à dire f est $\mathcal{C}^1$). Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est une base de E', $\mathrm{d}f_X(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X) \varepsilon_j$. On définit la *matrice jacobienne* de f au point X :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{d}f)_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Tous les résultats (combinaison linéaire, composition...) sont vrais pour f $\mathcal{C}^1$, ...

Composition : $f : \Omega \longrightarrow E'$, $g : \Omega' \longrightarrow E''$, $f(\Omega) \subset \Omega'$. Si Ω, Ω' sont des ouverts, E, E', E'' sont trois evnf rapportés aux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$, f et g différentiables sur Ω et Ω' respectivement, on note $J(f)_X$ et $J(g)_{X'}$ les matrices jacobienne de f resp. g aux points X resp. X'. Alors $J(g \circ f)_X = J(g)_{f(X)} \times J(f)_X$.

Règle de la chaîne : notons $f = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i e_i$, $g = \sum\limits_{j=1}^{q} g_i e'_i$, alors $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{q} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \times \frac{\partial g}{\partial y_j}(f_1(\ldots), \ldots, f_p(\ldots))$.

2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

2.1 Définitions

Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow E'$, $\mathcal{B}$ base de E. Dire que f est $\mathcal{D}^1$ (ou $\mathcal{C}^1$) ne dépend pas de $\mathcal{B}$. Les définitions suivantes sont encore indépendantes de $\mathcal{B}$. On dit que f est $\mathcal{C}^2$ sur Ω si toutes les $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ ont un sens et sont continues. De proche en proche, on peut définir les dérivées $k-$ièmes : $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\ldots(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}})\ldots))$, où $i_1, \ldots, i_k$ ne sont pas supposés distincts.

Théorème de Schwarz : soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow E'$, f supposée $\mathcal{C}^k$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ (permutations de $[1, k] \cap \mathbb{N}$), alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}}(\frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(2)}}}(\ldots(\frac{\partial f}{\partial x_{i_{\sigma(k)}}})\ldots)) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\ldots(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}})\ldots)).$$

2.2 Inégalité des accroissements finis

Soit $f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E'$ (Ω ouvert convexe). On suppose que $\exists M \geqslant 0 / \forall x \in \Omega$, $|||\mathrm{d}f_x||| \leqslant M$. Alors f est $M-$lipschitzienne. Réciproquement, soit $f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E'$, Ω ouvert quelconque. Si f est $M-$lipschitzienne, alors $|||\mathrm{d}f_x||| \leqslant M$ pour tout $x \in \Omega$.

Conséquence : soit Ω un ouvert convexe, $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E'$. f est constante ssi $\mathrm{d}f$ est nulle en tout point.

2.3 Formule de Taylor-Young

Soit E un evnf, ω définie au voisinage de 0_E. On dit que ω est un $\mathrm{o}(h^\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ donné) si elle est de la forme $\|h\|^\lambda \cdot \varepsilon(h)$ où $\varepsilon : E \longrightarrow E'$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^2} E'$, $X = (x_1, \ldots x_n) \in \Omega$. Si $h = (h_1, \ldots, h_n) \longrightarrow 0$,

$$f(X+h) = f(X) + \sum_i (\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)) h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)) h_i h_j + \mathrm{o}(h^2)$$

2.4 Extrema locaux de fonctions scalaires

Soit E un evnf, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset E$ ouvert. f admet un *maximum local* en $x_0 \in \Omega$ s'il existe $\rho > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0, \rho) \subset \Omega$ et $\forall x \in \mathrm{B}(x_0, \rho)$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. Ce maximum local est *strict* si de plus $\forall x \in \mathrm{B}(x_0, \rho)$, $f(x) = f(x_0) \Longrightarrow x = x_0$. On définit alors sans difficulté les notions de *minimum local*, *minimum local strict*. Un *extremum* est soit un minimum, soit un maximum.

CN : si f est $\mathcal{D}^1$ et admet un extremum local en $x_0 \in \Omega$, alors $\mathrm{d}f_{x_0}$ est nulle : x_0 est un *point critique* de f.

Autre CN (hors programme) : $f:\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$, $q_{x_0}(h)=\sum\limits_{i,j}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0))h_ih_j$ est une forme quadratique. Pour que f admette en $x_0\in\Omega$ un maximum (resp. un minimum) local, il faut que $\mathrm{d}f_{x_0}=\underline{0}$ et que q_{x_0} soit une forme quadratique négative (resp. positive).

CS : $f:\Omega\subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$, $\dim E=2$. Soit $X_0=(x_0,y_0)$ un point critique, on pose $r=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(X_0)$, $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(X_0)$, $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0)$, $M=\begin{pmatrix} r & s\\ s & t\end{pmatrix}$.

- Si $\det M<0$, il n'y a pas d'extremum local en X_0
- Si $\det M>0$ et $r>0$, f admet un minimum local en X_0
- Si $\det M>0$ et $r<0$, f admet un maximum local en X_0

Autre CS, hors programme : $f:\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$, Ω ouvert de E, E evnf quelconque. Soit $X_0\in\Omega$ un point critique, $q=q_{X_0}$. Si q est définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. un maximum) local en X_0. S'il existe $h_1,h_2\in E$ tels que $q(h_1)<0$ et $q(h_2)>0$, alors X_0 n'est pas un extremum local de f.

Interprétation géométrique : Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$, $\Sigma=\{M(x,y,z)\subset\mathbb{R}^3/[(x,y)\in\Omega]\wedge[z=f(x,y)]\}$. (x_0,y_0) est un point critique de f ssi le plan tangent à f en $(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$ est horizontal. Supposons de plus f $\mathcal{C}^2$ et (x_0,y_0) critique :

- Si $rt-s^2>0$, Σ est localement de la forme d'un paraboloïde de révolution et M_0 est dit *elliptique*.
- Si $rt-s^2<0$, M_0 est dit *hyperbolique*, ou *point-selle*, ou *col*. Σ a localement la forme d'une selle.

3 Théorèmes d'inversion

3.1 Remarques

Soit E,E' deux evnf, $\Omega\neq\varnothing$ un ouvert de E et $f:\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^k} E'$ où $k\leqslant+\infty$. On dit que f est un $\mathcal{C}^k-$*difféomorphisme* de Ω sur $f(\Omega)$ si :

- $f(\Omega)=\Omega'$ est un ouvert de E'
- f est une bijection de Ω sur Ω'
- f^{-1} est encore $\mathcal{C}^k$

Propriété d'invariance du domaine : si un tel difféomorphisme existe, alors $\dim E=\dim E'$.

3.2 Théorème d'inversion locale

Soit E,E' deux evnf tels que $\dim E=\dim E'$; soit $f:\Omega\subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} E'$ et $x\in\Omega$ tel que $\mathrm{d}f_x\in\mathcal{L}(E,E')$ soit inversible. Alors il existe un ouvert $\omega\subset\Omega$ tel que $x\in\omega$ et $f|_\omega$ soit un $\mathcal{C}^k-$difféomorphisme de ω sur $f(\omega)$.

Conséquence : soit $f:\Omega\subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} E'$; si $\mathrm{d}f_x$ est inversible en tout point $x\in\Omega$, alors $f(\Omega)$ est un ouvert de E'.

3.3 Théorème d'inversion globale

$f:\Omega\subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} E'$, on suppose f injective et $\mathrm{d}f_x$ inversible pour tout $x\in\Omega$. Alors $f(\Omega)$ est un ouvert de E' et f est un $\mathcal{C}^k-$ difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)=\Omega'$. Remarque : dans le cas réel, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} \mathbb{R}$ telle que f' ne s'annule pas sur I, alors f est un $\mathcal{C}^k-$difféomorphisme de I sur $f(I)$.

3.4 Théorème des fonctions implicites $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} \mathbb{R}$; soit $X_0=(x_0,y_0)$ tel que $f(X_0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Il existe des intervalles ouverts I et J tels que $(x_0,y_0)\in I\times J\subset\Omega$ et une unique application $\varphi:I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} J$ telle que $[((x,y)\in I\times J)\wedge(f(x,y)=0)]\iff[y=\varphi(x)]$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$, on a le même énoncé après échange des rôles de x et y.

Avec les notations précédentes, il existe un intervalle ouvert non vide $I'\subset I$ tel que $x_0\in I'$ et $\forall x\in I'$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\neq 0$. Alors $\forall x\in I'$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))=0$. Cela permet de calculer φ'.

Conséquence : soit Γ une courbe de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=0$. Soit $(x_0,y_0)\in\Gamma$, alors Γ possède une tangente en (x_0,y_0) d'équation $(X-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(Y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

3.5 Théorème des fonctions implicites $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} \mathbb{R}$; soit $X_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ en lequel $f(X_0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(X_0)\neq 0$. Alors il existe trois intervalles ouverts non vides I, J et K tels que $I\times J\times K\subset\Omega$ et il existe $\varphi:I\times J \xrightarrow{\mathcal{C}^k} K$ telle que $\forall(x,y,z)\in I\times J\times K$, $(f(x,y,z)=0)\iff(z=\varphi(x,y))$.

3.6 Énoncé général des fonctions implicites $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^p$

Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} \mathbb{R}^p$ telle que $f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p)\longmapsto\begin{pmatrix} f_1(\dots)\\ \vdots\\ f_p(\dots)\end{pmatrix}$. Soit $(X^\circ,Y^\circ)=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ tel que $f(X^\circ,Y^\circ)=0$. $J_{X^\circ,Y^\circ}(f)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} & \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}\end{array}\right)\in\mathfrak{M}_{p,n+p}(\mathbb{R})$ où la "jacobienne partielle par rapport à Y" est supposée inversible. Alors il existe $I_1,\dots,I_n,J_1,\dots,J_p$ intervalles ouverts tels que $(X^\circ,Y^\circ)\in I_1\times\dots\times I_n\times J_1\times\dots\times J_p\subset\Omega$ et $\varphi:I_1\times\dots\times I_n\longrightarrow J_1\times\dots\times J_p$ tels que $\forall(X,Y)\in I_1\times\dots\times J_p$, $f(X,Y)=0\iff Y=\varphi(X)$.

4 Formes différentielles de degré 1

4.1 Généralités

Soit E un evnf, et $E^*=\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ son dual. Si $\Omega\subset E$ est un ouvert, une *forme différentielle* de degré 1 sur Ω et de classe $\mathcal{C}^k$ est une application $\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^k} E^*$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ base de E, $\mathcal{B}^*=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ sa base duale. Une forme différentielle f $\mathcal{C}^k$ est donnée par : $x=\sum x_ie_i\longmapsto\sum\limits_{j=1}^{n}f_j(x_1,\dots,x_n)\varepsilon_j$. $\varepsilon_j:x=\sum x_ie_i\longmapsto e_j$ est une forme linéaire donc $(\mathrm{d}\varepsilon_j)_x=\varepsilon_j$ en tout point. On peut donc noter $\sum\limits_j f_j(x_1,\dots,x_n)(\mathrm{d}\varepsilon_j)_x$.

4.2 Formes fermées ou exactes

Ω un ouvert de E, $f:\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} E^*$ une forme différentielle. On pose $f:x\longmapsto\sum f_i(x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x_i$. On dit que f est *fermée* si pour tous i,j tels que $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant n$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ en tout point. $f:\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E^*$ est dite *exacte* (ou *totale*) s'il existe $\varphi:\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^{k+1}} \mathbb{R}$ telle que $\forall i$, $f_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. ($\varphi$ s'appelle le *potentiel scalaire* de f). Si Ω est connexe par arc, φ est unique à une constante additive près.

4.3 Théorème de Poincaré

Soit $f:\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} E^*$.

- Pour que f soit exacte, il faut qu'elle soit fermée.
- Si Ω est étoilé, cette condition est suffisante.