Espaces vectoriels normés

$\alpha 14 - MP^*$

1 Généralités

1.1 Normes

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}\,\text{ou}\,\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}-$ev. Une *norme* est une application $E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ souvent notée $\| \ \|$ vérifiant les axiomes suivants :

- *Séparation* : $\forall x \in E$, $(\|x\| = 0) \Longrightarrow (x = 0)$
- *Homogénéité* : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- *Inégalité triangulaire* (ou *sous-additivité*) : $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Si E est une $\mathbb{K}-$algèbre, $\| \ \|$ est une norme d'algèbre si de plus : $\forall (x, y) \in E^2$, $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$ (*sous-multiplicativité*). On impose également, en général, que $\|1_E\| = 1$.

1.2 Exemples

1.2.1 Normes associées à un produit scalaire

En général, c'est la vérification de l'inégalité triangulaire qui pose problème. Dans certains cas, on a $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ où φ est un produit scalaire (éventuellement hermitien). Dans ce cas, il est immédiat que $\| \ \|$ est bien une norme.

Exemple : $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $\|x\| = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t) \mathrm{d}t}$.

1.2.2 Normes $\| \ \|_p$ sur $\mathbb{K}^n$

Soit $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{K}^n$. On définit, pour $p \in \mathbb{N}^*$: $\|x\|_p = (\sum\limits_{i=1}^{n} |x|^p)^{\frac{1}{p}}$, ainsi que $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$.

Inégalité de Hölder (hp): si $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, $\forall p, q > 0 / \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$.

On en déduit que pour tout p, $\| \ \|_p$ est bien une norme. On a de plus les résultats suivants :

- $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$
- $\|x\|_\infty \leqslant 1 \cdot \|x\|_1$ (majoration optimale) ; $\|x\|_\infty \leqslant 1 \cdot \|x\|_2$ (optimale) ; $\|x\|_1 \leqslant n \|x\|_\infty$ (optimale) ; $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_\infty$ (optimale) ; $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_2$; $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$.

1.2.3 Normes $\| \ \|_p$ sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$

Soit I un segment de $\mathbb{R}$. On définit pour $f : I \stackrel{\mathcal{C}^0}{\longrightarrow} \mathbb{K}$: $\|f\|_p = (\int_I |f|^p)^{\frac{1}{p}}$, et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$. On a $\|f\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$. Les $\| \ \|_p$ sont encore des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

1.3 Normes équivalentes

Soit E un $\mathbb{K}-$ev, deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont dites *équivalentes* si

- $\exists \alpha > 0 / \forall x \in E$, $\|x\| \leqslant \alpha \|x\|'$
- $\exists \beta > 0 / \forall x \in E$, $\|x\|' \leqslant \beta \|x\|$

Cela équivaut à : $\alpha \|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \alpha' \|x\|$. Supposons E muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2. Notons E_1 (resp. E_2) l'espace métrique E muni de la distance associée à N_1 (resp. à N_2).

- Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, (x_n) converge au sens de N_1 ssi (x_n) converge au sens de N_2.
- Sont indépendantes de la norme (N_1 ou N_2) les notions de suite de Cauchy, valeur d'adhérence et complétude : E_1 est complet ssi E_2 est complet. De même, les notions d'ouvert, de fermé, d'intérieur, d'adhérence et de compacité ne dépendent pas de la norme.
- Soit $f : A \subset E \longrightarrow (E', d')$; les notions de continuité, uniforme continuité et caractère lipschitzien ne dépendent pas de la norme (en revanche, la constante de Lipschitz éventuelle en dépend en général).
- De même pour $f : A \subset E' \longrightarrow E$.

2 Continuité des applications linéaires

2.1 Caractérisation des applications linéaires continues

Soit $(E, \| \ \|)$, $(E', \| \ \|')$ deux espaces normés, $f \in \mathcal{L}(E, E')$; les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue
2. $\exists k \geqslant 0$ tel que f soit $k-$lipschitzienne
3. $\exists k \geqslant 0 / \forall x \in E$, $\|f(x)\|' \leqslant k \|x\|$
4. f est uniformément continue
5. f est continue en 0
6. $f|_{\mathrm{B}(0,1)}$ est bornée

2.2 Norme subordonnée d'une application linéaire continue

Soit $(E, \| \ \|)$, $(E', \| \ \|')$ deux espaces normés, $f \in \mathcal{L}(E, E')$ continue. La *norme subordonnée* de f notée $|||f|||$ est définie par $|||f||| \stackrel{def}{=} \min\{k \geqslant 0 / \forall x \in E, \|f(x)\|' \leqslant k \|x\|\}$. C'est la constante de Lipschitz de f. On a encore $|||f||| = \sup\{\frac{\|f(x)\|'}{\|x\|}, x \in E \backslash \{0\}\}$, ainsi que $|||f||| = \sup\{\|f(x)\|', x \in A\}$ avec $A \in \{\mathrm{B}(0, 1), \mathrm{B}'(0, 1), \mathrm{B}'(0, 1) \backslash \mathrm{B}(0, 1)\}$. On a toujours : $\|f(x)\|' \leqslant |||f||| \cdot \|x\|$. $|||f|||$ est enfin le scalaire k vérifiant $\forall x \in E$, $\|f(x)\|' \leqslant k \|x\|$ et l'une des trois propriétés : $\forall k' < k$, $\exists x \in E / \|f(x)\|' > k' \|x\|$; il existe une suite (x_n) sans élément nul telle que $\frac{\|f(x_n)\|'}{\|x_n\|}$ tende vers k ; $\exists x \in E \backslash \{0\} / \|f(x)\|' = k \|x\|$.

2.3 Cas d'un espace vectoriel préhilbertien

Soit E un ev préhilbertien, $f \in \mathcal{L}(E)$ supposée continue. On note $\mathrm{B}' = \mathrm{B}'(0, 1)$. On a : $|||f||| = \sup\limits_{x, y \in \mathrm{B}'} |(f(x) \mid y)| = |||f^*|||$.

Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est continue et $|||f||| = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(f^* f)}$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, on a $|||u||| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$. Si de plus u est positif, $|||u||| = \max \mathrm{Sp}(u)$.

2.4 L'espace vectoriel normé $\mathcal{L}_C(E, E')$

2.4.1 Cas général

Soient $(E, \| \ \|)$ et $(E', \| \ \|')$ deux espaces vectoriels normés. Par définition, $\mathcal{L}_C(E, E')$ est l'ensemble des fonctions linéaires continues $E \longrightarrow E'$. $\mathcal{L}_C(E, E')$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E')$. $f \longrightarrow |||f|||$ est une norme sur ce sev.

Propriété : $(E, \| \ \|)$, $(E', \| \ \|')$, $(E'', \| \ \|'')$ trois ev normés, si $f \in \mathcal{L}_C(E, E')$ et $g \in \mathcal{L}_C(E,' E'')$, alors $|||g \circ f||| \leqslant |||f||| \cdot |||g|||$.

2.4.2 L'algèbre normée $\mathcal{L}_C(E)$

Soit E un ev normé, on note $\mathcal{L}_C(E) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}_C(E, E)$. C'est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$; en outre, munie de $||| \ |||$, c'est une algèbre normée.

Cas de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$: si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on lui associe $u : X \in \mathbb{K}^n \longmapsto MX$. Alors $N(M) = |||u|||$ est une norme d'algèbre sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si on munit $\mathbb{K}^n$ de $\| \ \|_1$ (resp. $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$), alors $N_1(M) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |m_{i,j}|$ (resp. $N_2(M) = \sqrt{\max \mathrm{Sp}({}^t M M)}$, $N_\infty(M) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$) est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

2.5 Cas des applications multilinéaires

Soit $(E_1, \| \|_1), \dots, (E_m, \| \|_m), (E', \| \|')$ $(m+1)$ ev normés. Soit $f : E = \prod_{i=1}^{m} E_i \longrightarrow E'$ un application $m-$ linéaire. E peut être muni de $x \longmapsto \sum x_i$ ou $x \longmapsto \max x_i$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est continue
- f est continue en $(0, \dots, 0)$
- il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|' \leqslant k \prod_{i=1}^{m} \|x_i\|_i$.

Par exemple : si E est euclidien orienté, l'application produit mixte $[x_1, \dots x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe, est continue. Si E est préhilbertien muni de la norme associée à son produit scalaire, $(x, y) \longmapsto (x \mid y) \in \mathbb{K}$ est continue. Si E est un espace vectoriel normé de dimension 3, le produit vectoriel $(x, y) \longmapsto x \wedge y$ est continu.

3 Espaces vectoriels normés complets

$(E, \| \|)$ est dit *de Banach* s'il est complet pour cette norme. Une *algèbre de Banach* est une algèbre normée complète.

3.1 Exemples et contre-exemples

$\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$ muni de $\| \|_1$ n'est pas complet ; muni de $\| \|_\infty$, il l'est. Soit E, E' deux espaces vectoriels normés ; si E' est complet, alors $\mathcal{L}_C(E, E')$ est de Banach. Si E est complet, alors $\mathcal{L}_C(E)$ est une algèbre de Banach.

3.2 Séries dans les espaces vectoriels normés complets

$(E, \| \|)$ un ev normé ; on dit que la *série* $\{u_n\}$ converge si $n \in \mathbb{N} \longmapsto \sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite. On utilisera les mêmes notations que pour les séries réelles (cf. $\alpha 6$). Si $\{u_n\}$ converge alors $u_n \longrightarrow 0$. On dit que $\{u_n\}$ est *absolument convergente* si la série réelle $\{\|u_n\|\}$ converge. Si E n'est pas complet, une série absolument convergente peut éventuellement diverger. En revanche si E est complet, alors toute série absolument convergente est convergente.

3.3 Exponentielle dans une algèbre de Banach

Soit A une algèbre de Banach. Si $u \in A$, $\{\frac{u^n}{n!}\}_{n \geqslant 0}$ est absolument convergente. On pose alors $\exp u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$, que l'on pourra encore noter abusivement e^u. Comme $\|1_A\| = 1$, on a de plus $\|e^u\| \leqslant e^{\|u\|}$.

Compléments : On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme.

1. Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $e^{{}^tM} = {}^te^M$
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $e^{P^{-1}MP} = P^{-1}e^M P$
3. Si M est diagonalisable (resp. triangulaire supérieure), e^M est diagonalisable (resp. triangulaire supérieure)
4. Si M est scindée, $\det e^M = e^{\operatorname{tr}(M)}$
5. (hp) Si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$

Applications :

- si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in SO_n(\mathbb{R})$
- Soit E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ scindé. Alors il existe $\delta, \nu \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u = \delta + \nu$, $\delta\nu = \nu\delta$, δ diagonalisable et ν nilpotent
- Soit un système différentiel $X' = AX$ avec $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vecteur inconnu fonction de t vérifiant $X(0) = X_0$ fixé, et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ constante. L'unique solution de ce système est $t \longmapsto e^{tA} X_0$

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Équivalence des normes

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, deux normes quelconques sont équivalentes.

4.2 Théorème de Borel-Lebesgue

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Une partie de E est compacte ssi elle est fermée bornée.

4.3 Compléments

1. Tout ev normé de dimension finie est complet
2. Soit E un ev normé, F sev de E de dimension finie, alors F est fermé et complet.

4.4 Continuité des applications linéaires

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, E' un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors f est continue. On a donc $\mathcal{L}_C(E, E') = \mathcal{L}(E, E')$. De même si $f : \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow E'$: si tous les E_i sont de dimension finie, f est continue.

4.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit E un espace métrique, $A \subset E$, $x \in E$ est un *point d'accumulation* de A ssi $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Cela équivaut à : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X / X \neq x$ et $X \in A \bigcap (\mathrm{B}(x, \varepsilon))$; ou encore à :$\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ non stationnaire telle que $x = \lim x_n$; ou enfin à : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \bigcap A$ est de cardinal infini.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : Si E est un ev normé de dimension finie et $A \subset E$ de cardinal infini, alors A possède au moins un point d'accumulation.