Espaces préhilbertiens complexes

$\alpha 12 - MP^*$

1 Généralités

1.1 Formes sesquilinéaires

Soit E un $\mathbb{C}-$ev. $f : (x,y) \in E^2 \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{C}$ est une *forme sesquilinéaire* si :

- $\forall x \in E$, $y \longmapsto f(x,y)$ est une forme linéaire
- $\forall y \in E$, $x \longmapsto f(x,y)$ est une *forme semi-linéaire*, c'est à dire $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f(\lambda x, y) = \overline{\lambda} f(x,y)$.

f est *hermitienne* si de plus $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$.

L'ensemble des formes sesquilinéaires sur E, noté $FS(E)$, est un sev de $\mathbb{C}^{E\times E}$; l'ensemble des formes sesquilinéaires hermitiennes $FSH(E)$ est un sev de $FS(E)$ vu comme un $\mathbb{R}-$ev.

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^* la *transconjuguée* de M, c'est à dire $M^* = {}^t\overline{M}$. M est hermitienne ssi $M = M^*$. On note $H_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ hermitiennes ; c'est un sous$-\mathbb{R}-$ev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On a : $\dim_{\mathbb{R}}(H_n(\mathbb{C})) = n^2$.

1.2 Identité de polarisation

Soit $f \in FS(E)$, on pose $q(x) = f(x,x)$ pour tout $x \in E$. On a :

$$\forall x, y \in E, f(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(-x+y) + iq(ix+y) - iq(-ix+y))$$

Conséquences :

1. Soit $f \in FS(E)$, si $\forall x \in E$, $f(x,x) = 0$, alors $f = \underline{0}$.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$; $(X,Y) \longmapsto X^*MY$ est sesquilinéaire. Si $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $X^*MX = 0$, alors $M = 0$.
3. $f \in FS(E)$ est hermitienne ssi $\forall x$, $q(x) \in \mathbb{R}$.

2 Formes positives

2.1 Notion de forme quadratique hermitienne

Soit E un $\mathbb{C}-$ev. $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique hermitienne si il existe une forme sesquilinéaire hermitienne f telle que $\forall x \in E$, $q(x) = f(x,x)$. Dans ce cas, f est l'unique *forme polaire* de q.

$q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique hermitienne ssi :

1. $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $q(\lambda x) = \overline{\lambda}\lambda q(x)$
2. $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}(q(x+y) - q(-x+y) + iq(ix+y) - iq(-ix+y))$ est une forme sesquilinéaire hermitienne

2.2 Propriétés des formes quadratiques hermitiennes positives

Soit f une forme sesquilinéaire hermitienne sur E, q la forme quadratique hermitienne associée. Si q est positive, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|f(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)q(y)}$. Dans ce cas, on a les corollaires suivants :

Corollaire 1 : $q(x) = 0$ implique $\forall y \in E$, $f(x,y) = 0$.

Corollaire 2 : $x \longmapsto \sqrt{q(x)}$ est une semi-norme.

2.3 Formes définies positives

f une fsh, q la fq associée. On dit que f est *définie positive* si $\forall x \neq 0$, $f(x,x) \in \mathbb{R}^{+*}$. On parlera de même de q définie positive lorsque f l'est. On dit encore que f est un *produit scalaire hermitien*, souvent noté $(x \mid y)$, $x \bullet y, \dots$ $x \longmapsto \sqrt{q(x)}$ est alors une vraie norme, notée $\| \|$.

Cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz : lorsque (x,y) est liée.

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : lorsque (x,y) est positivement liée (E considéré comme $\mathbb{R}-$ev).

Procédé de Gram-Schmidt : avec ces notations, soit $(e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille libre ($\mathcal{I}$ étant une partie non vide de $\mathbb{N}$). Il existe alors une unique famille orthonormale $(\varepsilon_i)_{i\in\mathcal{I}}$ telle que :

- $\forall i \in \mathcal{I}$, $\varepsilon_i \in \mathrm{Vect}(e_j)_{\substack{j\in\mathcal{I}\\ j\leqslant i}}$
- $\forall i \in \mathcal{I}$, $(e_i \mid \varepsilon_i) \in \mathbb{R}^{+*}$

Si $\mathcal{I}$ est fini, $M_{(e_i)}(\varepsilon_j)$ est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Un $\mathbb{C}-$ev muni d'un produit scalaire hermitien est appelé *préhilbertien* (complexe) ; s'il est de dimension finie, on dit qu'il est *hermitien*. Un ev préhilbertien complexe et complet est appelé *espace de Hilbert*.

2.4 Projections orthogonales

2.4.1 Projections orthogonales sur un sous-espace de dimension finie

Soit E un ev préhilbertien, F un sev de dimension finie. Si $x \in E$, $\exists! y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$. Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ est une BON de F, $y = \sum_{i=1}^{m} (\varepsilon_i \mid x)\varepsilon_i$. On a alors $E = F \oplus F^\perp$. $x \overset{p}{\longmapsto} y$ est le projecteur sur F associé à cette somme directe. $\mathrm{Im}(p) = F$, $\ker p = F^\perp$.

2.4.2 Propriétés liées à la distance

Avec les mêmes notations, si $x \in E$, p vérifie $\forall z \in F$, $\|x - z\| \geqslant \|x - y\|$ avec égalité si et seulement si $z = y$. Le théorème de Pythagore subsiste : $\forall x, y \in E$, $(x \perp y) \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$; de même, on a la formule du parallélogramme $\forall x, y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

2.5 Inégalités de Bessel-Parseval

E un ev préhilbertien, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ une famille ON finie. On a

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{m} |(\varepsilon_i \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

avec égalité ssi $x \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$. En conséquence, si $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille ON, $\forall x \in E$, $((e_i \mid x))_{i\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |(e_i \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

avec égalité ssi $x \in \overline{\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in\mathbb{N}})}$.

3 Compléments

E est un ev hermitien

3.1 Adjoints d'un endomorphisme

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists! v \in \mathcal{L}(E) / \forall x, y \in E$, $(u(x) \mid y) = (x \mid v(y))$; on note $v = u^*$: v est l'*adjoint* de u. Si $\mathcal{B}$ est une BON, $M_{\mathcal{B}}(u^*) = (M_{\mathcal{B}}(u))^* = {}^t\overline{M_{\mathcal{B}}(u)}$. $u \longmapsto u^*$ est semi-linéaire involutive. u est *normal* si u et u^* commutent ; u est *autoadjoint* (ou *hermitien*) si $u = u^*$; u est *unitaire* si $u^*u = Id$. On peut caractériser les endomorphismes unitaires de la manière suivante :

- u est unitaire ssi
- $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$ ssi
- $\forall x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$

On note $\mathbb{U}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u^*u = Id\}$ le *groupe unitaire* ; c'est un sous-groupe de $GL(E)$. u est *antihermitien* si $u^* = -u$; dans ce cas, iu est hermitien.

3.2 Réduction des endomorphismes

Lemme : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

Propriété : si u est normal, alors u est diagonalisable et il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.

3.3 Cas des endomorphismes hermitiens

Si $u^* = u$, les résultats du paragraphe précédent s'appliquent. Mieux : $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$; $\forall \lambda \neq \mu \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda \perp E_\mu$; si F est un sev stable par u, alors $F^\perp$ l'est aussi.

u hermitien est ***positif*** si $\forall x \in E$, $(u(x) \mid x) \in \mathbb{R}^+$ (ssi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$) ; u est ***défini positif*** ssi $\forall x \neq 0$, $(u(x) \mid x) \in \mathbb{R}^{+*}$ (ssi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$).

Si $v \in \mathcal{L}(E)$, $u = v^*v$ est hermitien positif ; il est défini positif ssi de plus $v \in GL(E)$. Si u est hermitien positif, $\exists v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = v^*v$. v est unique si on le suppose hermitien positif, et dans ce cas $v \in \mathbb{R}[u]$. De même si u est hermitien défini positif, il existe $v \in GL(E)$ tel que $u = v^*v$; v est unique si on le suppose défini positif, et dans ce cas $v \in \mathbb{R}[u]$.

Décomposition de Cholesky : Soit M une matrice hermitienne définie positive dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $M = T^*T$.

3.4 Endomorphismes unitaires

Soit $u \in \mathbb{U}(E)$, alors :

1. u est scindé et $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U}$
2. u est diagonalisable et $\exists \mathcal{B}$ BON telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale

Réciproquement, si u satisfait 1. et 2. alors u est unitaire.

Rappel : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.