Séries trigonométriques

$\alpha 10 - MP^*$

1 Généralités sur les fonctions périodiques

1.1 Questions liées à la classe $\mathcal{C}^k$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ $T-$périodique ($T > 0$). f est $\mathcal{C}^k_m$ ssi $f|_{[a,a+T]}$ est $\mathcal{C}^k_m$ ($a \in \mathbb{R}$).

1.2 Dérivées et primitives des fonctions périodiques

$f : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^k_m} \mathbb{C}$ est dite *régulière* (au sens de Dirichlet) ou *satisfait la convention de Dirichlet* si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}(\lim_{y \overset{<}{\to} x} f(y) + \lim_{y \overset{>}{\to} x} f(y)).$$

Si f est $\mathcal{C}^1_m$, f' n'est pas définie en les points où elle est discontinue.

1.3 Séries trigonométriques

Soit $T > 0$, on appelle *série trigonométrique* toute série de fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forme $\{u_n\}_{n \geqslant 0}$, où :

- u_0 est une constante $u_0 = \frac{a_0}{2}$
- Pour $n \geqslant 1$, u_n est de la forme $x \longmapsto a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nx)$ où $a_n, b_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si cette série converge simplement sur $\mathbb{R}$, sa fonction-somme S est de période T. Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont absolument convergentes, alors $\{u_n\}$ converge normalement et S est de plus $\mathcal{C}^0$.

De la même façon, on peut considérer une série de fonctions de la forme $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_n(x) = C_n e^{inx}$. On appelle somme à l'ordre N de cette série la suite $S_N = \sum\limits_{k=-N}^{N} C_k e^{ikx}$. Si cette somme admet une limite, on dit que la série $\{C_n e^{inx}\}$ converge et on note $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$ sa somme.

On peut passer de l'une à l'autre de ces représentations an posant : $a_n = C_n + C_{-n}$ et $b_n = i(C_n - C_{-n})$. $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable ssi $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{C_n\}_{n \in (-\mathbb{N}^*)}$ sont absolument convergentes.

Séries de Fourier : si $f : \mathbb{R} \underset{T-\text{pér.}}{\xrightarrow{\mathcal{C}^0}} \mathbb{C}$, on définit $C_n(f) = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t) e^{-\frac{2\pi}{T}nit} \mathrm{d}t$, $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)\mathrm{d}t$ ($n \geqslant 0$) et $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)\mathrm{d}t$ ($n \geqslant 1$) (ces valeurs ne dépendent pas du choix de α). La ***série de Fourier*** de f est alors par exemple $\{C_n e^{\frac{2\pi}{T}nix}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, ou $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ où $u_0 = \frac{a_0}{2}$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_n = a_n(f)\cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n(f)\sin(\frac{2\pi}{T}nx)$.

2 Convergence des séries de Fourier

2.1 Théorème de Dirichlet

$f : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^1_m} \mathbb{C}$ $T-$périodique, on peut lui associer ses coefficients de Fourier a_n, b_n et C_n qui en découlent. Avec ces hypothèses,

1. La série de Fourier de f converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la somme de cette série est $\frac{1}{2}(\lim_{y \overset{<}{\to} x} f(y) + \lim_{y \overset{>}{\to} x} f(y))$. En particulier cette somme est f en tout point où f est continue.

2.2 Cas de la convergence normale

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ $T-$périodique où f est $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1_m$. La série de Fourier de f est alors normalement convergente. Plus précisément, les séries $\{|C_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{|C_{-n}|\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

2.3 Dérivation des séries de Fourier

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ $T-$périodique où f est $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1_m$, et f' $\mathcal{C}^0_m$. Alors :

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $C_n(f') = \frac{2\pi}{T} ni C_n(f)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{ \begin{array}{l} a_n(f') = \frac{2\pi}{T} n b_n(f) \\ b_n(f') = -\frac{2\pi}{T} n a_n(f) \end{array} \right.$.

2.4 Primitivation

$f : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$ $T-$périodique, on suppose que $\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = 0$. (Cela ssi $a_0(f) = 0$ et $C_0(f) = 0$).

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé, $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est alors $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1_m$ et $T-$périodique vu l'hypothèse. Alors :

- $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $C_n(F) = \frac{T}{2\pi}\frac{C_n(f)}{ni}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(F) = -\frac{T}{2\pi}\frac{b_n(f)}{n}$ et $b_n(f) = \frac{T}{2\pi}\frac{a_n(f)}{n}$

2.5 Identification

Une série trigonométrique qui converge uniformément est égale à sa série de Fourier. Autrement dit, si $\{\gamma_n e^{nix}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ cvu vers f, alors $\gamma_n = C_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3 Résultats quadratiques

3.1 Généralités

$T > 0$ fixé, E_m désigne le $\mathbb{C}-$ev des fonctions $\mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$ $2\pi-$périodiques ; E_0 est le sev de E_m formé des applications régulières, E le sev de E_0 formé des applications continues, $\mathcal{P}$ le sev de E formé des polynômes trigonométriques. Sur $E_0 \times E_0$, on définit le produit scalaire hermitien $(f \mid g) = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f}g$. Sur $E_m \times E_m$, ce n'est pas un vrai produit scalaire. Pour $f \in E_m$, $\|f\|_2 = \sqrt{(f \mid f)} \in \mathbb{R}^+$.

3.2 Formule de Bessel-Parseval

$f \in E_m$, soit a_n, b_n, C_n ses coefficients de Fourier.

1. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est de carré sommable et $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t$.
2. Les séries $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes et $\left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \|f\|_2^2$

3.3 Convergence en moyenne quadratique

$f \in E_m$, elle admet des coefficients de Fourier a_n, b_n et C_n. $S_n : x \longmapsto \sum\limits_{k=-N}^{N} C_k e^{\frac{2\pi}{T}ikx}$. Alors $\|f - S_N\|_2 \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Corollaire : $\mathcal{P}$ est dense dans E_m au sens de $\| \ \|_2$.