Formulaire de trigonométrie circulaire

$\alpha 1 - MPSI$

1 Relations

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

Valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\backslash$

Symétries et périodicités :

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\tan(-x) = \tan x$
$\cos(x+2\pi) = \cos x$	$\sin(x+2\pi) = \sin x$	$\tan(x+\pi) = \tan x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$	$\sin(x+\pi) = -\sin x$	$\tan(x+\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan x}$
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$	$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{1}{\tan x}$
$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$	$\sin(x-\frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\cot x \overset{def}{=} \frac{1}{\tan x}$

2 Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$; $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$; $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Expression en fonction de $t = \tan(\frac{\theta}{2})$:
$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$; $\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$.

3 Somme et différence de cosinus et sinus

3.1 Factorisation

- $\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- $\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
- $\sin p - \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- $\sin p - \sin q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

3.2 Duplication

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$
- $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
- $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$; $1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x$

4 Equations

- $[\sin x = \sin y] \iff [(\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi) \vee (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi - y + 2k\pi)]$
- $[\cos x = \cos y] \iff [(\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi) \vee (\exists k \in \mathbb{Z}, x = -y + 2k\pi)]$
- $[\tan x = \tan y] \iff [\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\pi]$
- $[\cot x = \cot y] \iff [\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\pi]$
- Equations du type $a\cos x + b\sin y = c$ (en (x,y)) : on met $\sqrt{a^2+b^2}$ en facteur

5 Dérivation

$$\cos' = -\sin$$
$$\sin' = \cos$$
$$\tan' = 1 + \tan^2$$
$$\cot' = -1 - \cot^2 = -\frac{1}{\sin^2}$$

6 Règles de Bioche

Méthode d'intégration des fractions rationnelles trigonométriques :

- Si l'intégrale est invariante pour le changement de variable $t \longleftarrow -t$, on procède au changement de variable $\underline{u} = \cos t$
- Si l'intégrale est invariante pour le changement de variable $t \longleftarrow \pi - t$, on procède au changement de variable $\underline{u} = \sin t$
- Si l'intégrale est invariante pour le changement de variable $t \longleftarrow \pi + t$, on procède au changement de variable $\underline{u} = \tan t$