

MEANINGFUL SCALES DETECTION ALONG DIGITAL CONTOURS FOR UNSUPERVISED LOCAL NOISE ESTIMATION

KÉVIN POLISANO

3/12/2012

1 Introduction

Les formes qui nous apparaissent au sein des images sont le résultat d'une discrétisation d'un objet continu (en pixels). L'analyse géométrique de ces formes se rapporte assez souvent à celle de leur contour, lui aussi discret, qui est porteur d'information sur la géométrie de l'objet. La géométrie discrète utilise des techniques spécifiques qui reposent sur l'extraction de *segments maximaux* que nous définirons plus loin. Cependant ces contours ne sont pas des discrétisations parfaites de formes idéales et présentent donc du bruit. Une panoplie de méthodes ont été développées afin d'éliminer ces perturbations, mais ont une application limitée car elles nécessitent certains paramètres (propres au problème étudié) et sont globales (alors que le bruit peut être variable le long de la forme). L'idée pour palier ces problèmes, issue du traitement d'image, est de faire une analyse multiéchelle. Dans ce domaine plusieurs approches existent pour déterminer une échelle locale, s'appuyant sur des schémas d'optimisation. Mais elles s'appliquent mal aux images binaires et aux contours discrets car elles reposent sur une analyse de corrélation ou d'information sur le gradient dont on ne dispose pas (seulement le contour discret en entrée). L'objet de cet article est de reprendre l'idée de l'analyse multiéchelle mais en s'appuyant sur des propriétés des contours discrets. Plus précisément, les outils développés dans ce papier permettent d'estimer localement si un contour est endommagé ou non, d'évaluer le taux de perturbation en un certain sens, et de donner une échelle significative pour laquelle l'objet doit être considéré.

2 Propriétés asymptotiques des segments maximaux

Définition. Nous avons vu en cours comment sont définies les droites discrètes (DSL). Un segment discret (DSS) est un 4-chemins parmi cet ensemble de pixels, et il est dit *maximal* quand on ne peut plus ajouter de points pour en faire un DSS. Des algorithmes, de type celui vu en cours du à Reveilles, permettent de déterminer à partir d'un point P_0 du contour, tous les segments maximaux qui le contiennent, en ce en un temps linéaire.

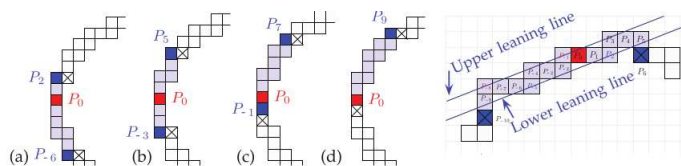


Figure 1: Segments maximaux couvrant P_0

Résultat clé de l'article. Etant donné S une forme fermée de \mathbb{R}^2 de frontière \mathcal{C}^3 par morceaux que l'on discrétise sur une grille de pas h , P un point de la frontière et U un voisinage ouvert de P connexe par arcs. Soient L_j^h les longueurs des segments maximaux couvrant P sur la frontière discrète. Alors on a les propriétés asymptotiques suivantes :

- si U est strictement concave ou convexe :

$$\Omega(1/h^{1/3}) \leq L_j^h \leq O(1/h^{1/2})$$

- si U est de courbure nulle :

$$\Omega(1/h) \leq L_j^h \leq O(1/h)$$

Le premier point établit le comportement asymptotique de la longueur des DSS au niveau des parties courbées de la frontière, et la second au niveau des parties plates.

Idée. En pratique nous n'avons pas accès à plusieurs versions de l'objet discrétisé de plus en plus finement, mais seulement à une image correspondant à *une* discrétisation avec un pas h fixé, et pas mieux. On voit alors mal a priori comment exploiter les propriétés asymptotiques ci-dessus. L'idée géniale introduite consiste à prendre le problème à l'envers, en considérant que cette discrétisation avec un pas h est la résolution finale et qu'on peut *sous-discrétiser* avec des pas $h_i = ih$, c'est-à-dire en quelque sorte dézoomer progressivement en créant ainsi des versions de l'objet de résolutions de plus en plus grossières. De cette façon, on peut calculer les longueurs $(L_j^{h_i})_j$ à différentes échelles et voir comment elles se comportent asymptotiquement (soit quand on se rapproche de la résolution finale que l'on a en entrée).

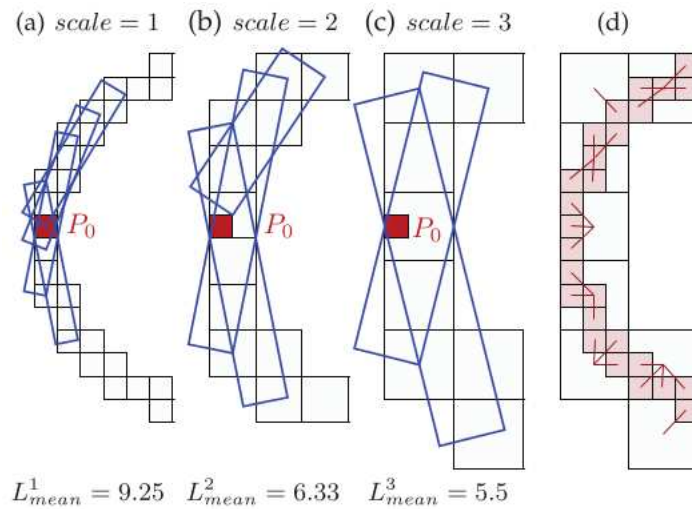


Figure 2: Sous-discrétisation et moyenne des longueurs des DSS couvrant P_0

Application. On rappelle que l'objectif est de savoir si localement un contour est bruité ou non. On prend un point P du contour, disons pour fixer les idées sur une partie courbe. Pour chaque échelle i (et la discrétisation $h_i = ih$ associée), on calcule le maximum M_i et le minimum m_i des longueurs $(L_j^{h_i})_j$ des segments maximaux couvrant P . On sait alors dans le cas où la discrétisation est **parfaite** (i.e sans bruit) que les fonctions $h_i \mapsto M_i$ et $h_i \mapsto m_i$ se comportent respectivement comme $1/h_i^{1/2}$ et $1/h_i^{1/3}$ quand $h_i \rightarrow h$ soit pour des i proches de 1. Graphiquement en échelle logarithmique cela signifie que les points $(\log(i), \log(M_i))$ (resp. $(\log(i), \log(m_i))$) doivent être alignés sur une droite de pente $-1/2$ (resp. $-1/3$) pour des i petits. Par conséquent en analysant le graphe de ces points on est en mesure de dire si le contour est "sain" autour de P , en effet

on trouvera des points alignés et on sera même capable d'identifier si P appartient à une partie courbe ou plate du contour grâce au coefficient directeur de la droite. Tandis qu'en présence de bruit ces propriétés asymptotiques ne sont pas vérifiées et on obtiendra autre chose qu'une droite.

remarque : pour prendre en compte les éventuels artefacts de discrétisation on prend la moyenne des $(L_j^{h_i, x_0, y_0})_j$ que l'on remoyenne encore sur les i^2 possibilités de sous-échantillonnages :

$$\bar{L}^{h_i} = \frac{1}{i^2} \sum_{0 \leq x_0, y_0 \leq i} \frac{1}{i} \sum_j L_j^{h_i, x_0, y_0}$$

et on considère le graphe des points $(\log(i), \log(\bar{L}^{h_i}))$ appelé profil multiéchelle $\mathcal{P}_n(P)$ (n étant le nombre de sous-échantillonnages), qui doit en absence de bruit ressembler à une droite (dont le coefficient directeur $\mu_n(P)$ obtenu après régression linéaire se situe dans l'intervalle $[-1, -1/2[$ si P est dans une zone plate, ou dans $[-1/2, -1/3]$ si P est dans une zone courbe, plus exactement le seuil considéré pour distinguer les cas est $t_{f/c} = -0,52$).

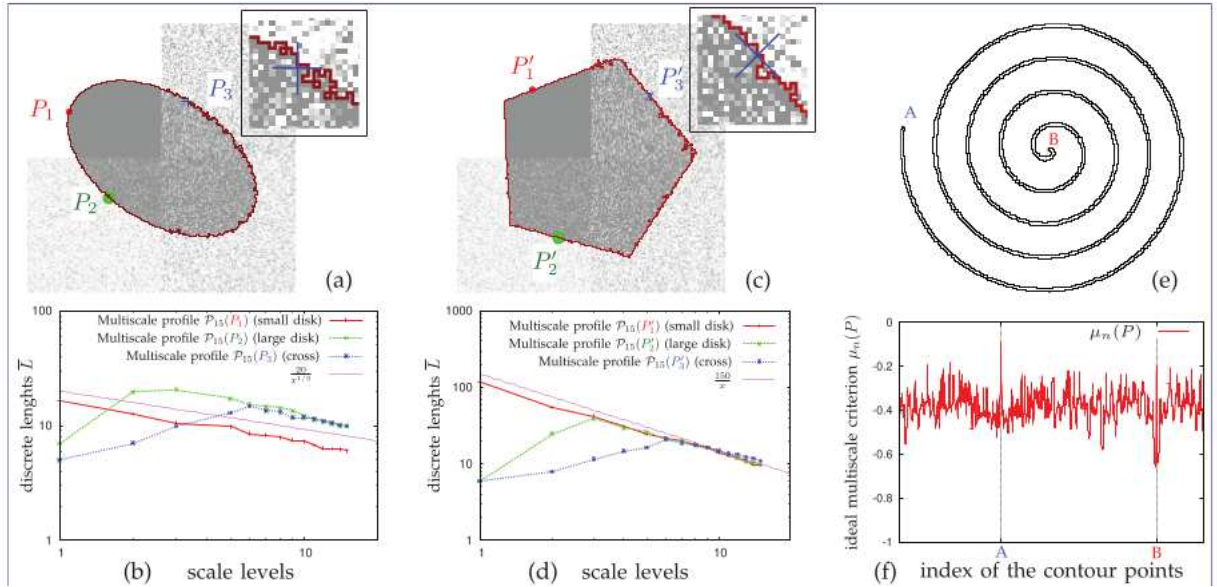


Figure 3: Profils multiéchelle en trois points P_i sur deux formes différentes

Analyse du profil multiéchelle. Sur les graphes (b) et (c) on constate effectivement que pour des points P_1, P'_1 pris dans des zones non bruitées, les profils correspondant en rouge s'apparentent à une droite, et en comparant avec la droite de référence en rose, on peut affirmer que leur coefficient directeur est respectivement $-1/3$ et -1 ce qui est cohérent puisque P_1 est sur un bord courbé de l'ellipse tandis que P'_1 est sur un bord droit du pentagone. Les autres profils associés aux points restants sont d'autant plus dans les choux pour i proche de 1 que la zone dans laquelle ils vivent est bruitée. Quant au graphe (f) qui n'est pas bruité, on a bien $\mu_n(P)$ qui varie dans $[-1/2, -1/3]$ puisqu'on se déplace sur une spirale (courbe).

3 Echelle significative et quantification du bruit

A ce stade nous sommes en mesure de dire si localement à un point du contour on a du bruit ou non. Ce que l'on souhaiterait c'est quantifier ce bruit, et pouvoir donner une échelle (ou une plage d'échelles) depuis laquelle le contour est vu sans bruit (c'est-à-dire on dézoome jusqu'à

ne plus être sensible aux perturbations). Un tel intervalle (i_1, i_2) est tel que pour toutes les échelles intermédiaires $i_1 \leq i \leq i_2$, les points (X_i, Y_i) du profil vérifient $\frac{Y_{i+1}-Y_i}{X_{i+1}-X_i} \leq t_m$ (en pratique $t_m = 0$), c'est-à-dire que la longueur moyenne des DSS diminue pour des résolutions de plus en plus grossières. En effet pour une zone non bruitée c'est intuitivement ce qu'il se passe (voir figure 2), alors qu'en présence de bruit ce n'est pas nécessairement le cas. Ainsi déterminer une **échelle significative** consiste à dézoomer (i.e augmenter i) jusqu'à obtenir cette propriété de décroissance des longueurs sur (i_1, i_2) . L'échelle qui précède $\nu(P) = i_1 - 1$ est donc définie comme étant le **niveau de bruit** localement au point P .

Parfois, quand le bruit est trop important, sa géométrie à de petites échelles devient pertinente (typiquement dans le cas de fractales où la géométrie globale se répète à plus petite échelle) et donc considérer le premier dézoom pour lequel la moyenne des longueurs diminue n'est pas très judicieux. Par exemple figure 6 le profil au point marqué indique un niveau de bruit nul, alors qu'on constate très nettement la présence de bruit sur la forme globale. Dans ce cas, pour définir le bruit, on procède inversement : on part de la résolution la plus grossière ($i = n$ où l'on est sûr de ne pas voir de bruit, donc des pentes négatives) et on zoome progressivement (i diminue) jusqu'à trouver une pente positive. Cette échelle appelée **échelle standart** est notée $\sigma(P)$.

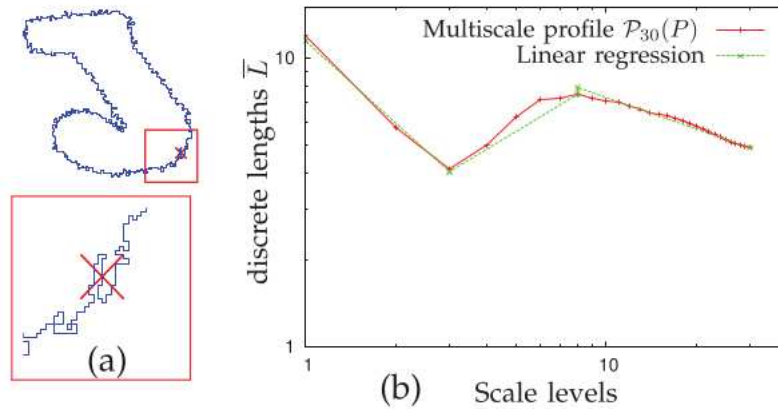


Figure 4: Illustration de l'échelle standart sur un contour bruité (égal à 8)

4 Validation expérimentale

Détection de bruit et nature du contour. Afin de visualiser le bon fonctionnement de la détection de bruit ils tracent pour chacun des points P du contour, une boîte bleue de taille $\nu(P) + 1$ (échelle significative) centrée en P . Ainsi dans les zones très bruitées on observera de grosses boîtes. Si on veut donner un sens au niveau de bruit global de la forme on effectue une moyenne des $\nu(P)$, et comme on veut également que ce niveau de bruit soit indépendant de l'échantillonnage on répète l'expérience sur des grilles plus grossières et on prend finalement la moyenne des niveaux de bruits. On peut aussi marquer les points de contours P en rouge/bleu suivant qu'on détecte une zone d'aplat ou de courbure comme c'est le cas sur la figure ci-dessous.

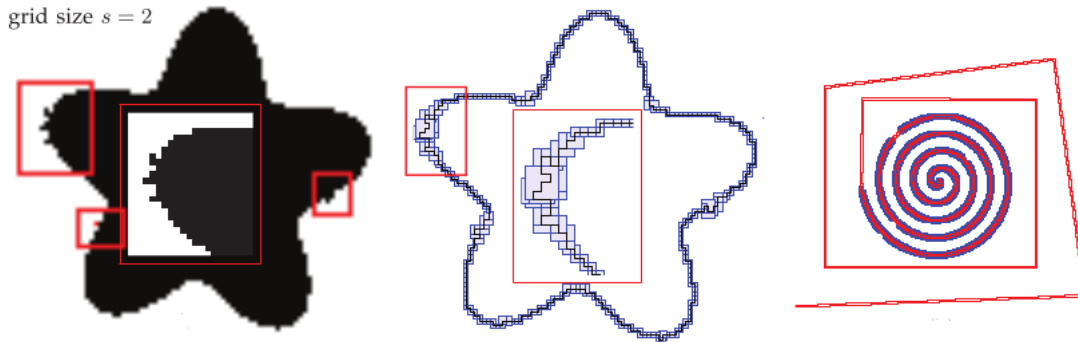


Figure 5: Détection et localisation du bruit / nature du contour

Expériences sur des images réelles

Détection de bruit. Pour des images en niveaux de gris issues d'une caméra (images réelles) la démarche préliminaire est la même que celle réalisée en TP : en premier lieu on seuille l'image pour se ramener en binaire, puis on effectue un marquage par composantes connexes, et enfin on applique un algorithme de détection de contours de celles-ci. On peut alors mettre en oeuvre la procédure de détection de bruit sus-citée, et on voit bien sur l'image de la figure 6 que le bruit autour des lettres est bien détecté. Comme le bruit est fort, on utilise de préférence l'échelle standard $\sigma(P)$ à la place de $\nu(P)$.

Débruitage. Ensuite on cherche à éliminer le bruit ainsi détecté. La procédure qui suit est très avantageuse car elle agira différemment en fonction du taux de bruit. En effet à un point P du contour donné, on va débruiter localement sur une fenêtre centrée en P de taille $\nu(P)$ en appliquant un masque median de même taille à tous les pixels Q de cette fenêtre. Autrement dit plus $\nu(P)$ est élevé (c'est-à-dire plus il y a de bruit à supprimer), plus la taille du masque median est grande donc plus on débruite fort et loin autour du pixel P . On dispose ainsi d'un masque adaptatif qui donne de meilleurs résultats (cf. Table 1 de l'article) qu'un filtre median global, car pour un masque de taille fixe trop petite on n'élimine pas suffisamment de bruit et pour une taille trop grande on lisse trop les coins.

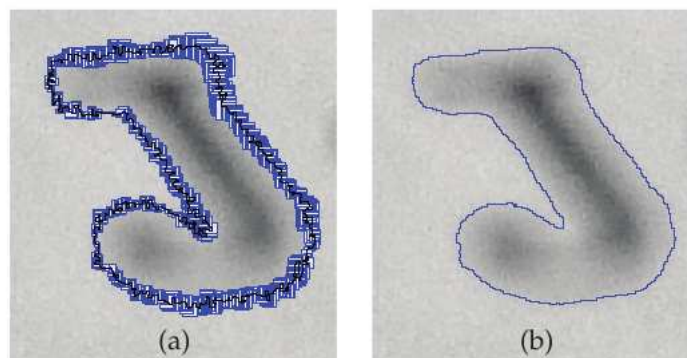


Figure 6: Détection de bruit / Débruitage par filtre médian adaptatif

remarque : on pourrait implémenter en TP toutes ces procédures assez facilement, puisque l'on sait extraire un contour d'une image en niveau de gris et qu'on a vu l'algorithme de Reveilles utile au comptage des segments maximaux. Le dernier point à programmer avant de faire l'analyse de la moyenne des longueurs est le sous-échantillonnage qui n'est pas très compliqué à implémenter, les contours sous-échantillonnés $\phi_i^{(x_0, y_0)}$ sont calculés comme suit $(X_j, Y_j) = ((x_j - x_0) \% i, (y_j - y_0 \% i))$.

5 Application à des problèmes géométriques

Estimateurs géométriques. Prenons l'exemple de l'estimateur de tangente discrète basé sur les segments maximaux, appelé λ -MST, qui est un excellent estimateur **uniquement** pour des formes parfaitement discrétisées. Je passe l'explication de la procédure d'estimation de la tangente, le point intéressant est que l'on va se placer à l'échelle significative pour pouvoir appliquer cette procédure, et que c'est cette tangente qui sera assignée au point P . On constate alors que même dans les zones bruitées l'estimateur fournit une tangente cohérente (b) et (d), alors que si on applique naïvement l'estimateur sans changer d'échelle on observe de sérieux problèmes dans les zones bruitées de (a) et (c). On pourrait aussi appliquer l'estimateur de manière globale à une échelle plus grossière (c'est ce qui est fait à échelle 4 et 8 sur les graphes représentant l'angle de la tangente en chaque point), mais les changements d'angles brutaux sont moins prononcés à cette échelle, donc l'estimateur fournira des résultats moins exacts dans les zones pointues.

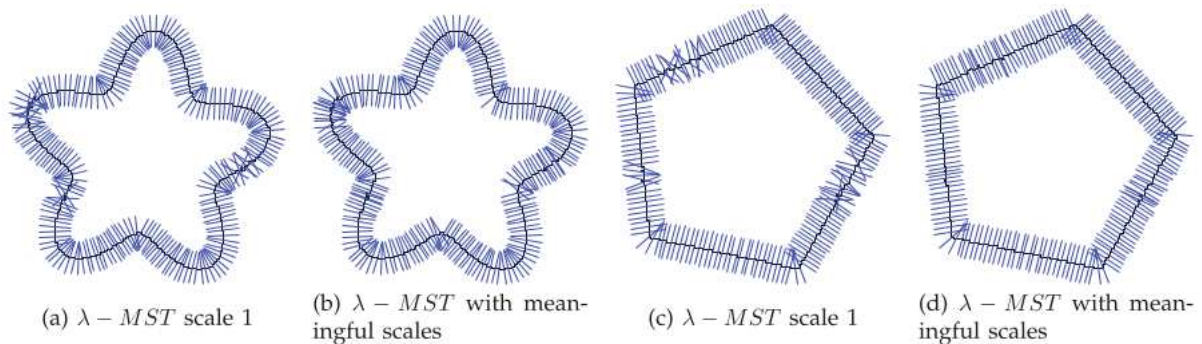


Figure 7: Estimation de la tangente avec et sans l'échelle significative

Reconstruction de polygones. L'algorithme considéré est celui de Bhowmick et Bhattacharya, qui utilise un paramètre τ pour ajuster le bon fonctionnement de la procédure de reconstruction. Ils ont testé cet algorithme pour 20 valeurs τ de 1 à 20 sur une image de kangourou bruitée, ou plus exactement sur l'image à l'échelle ν où ν est le niveau de bruit global de l'image défini précédemment. Pour chaque τ on obtient ainsi une reconstruction polygonale qui est comparée avec la reconstruction exacte (via la distance de Hausdorff qui mesure la distance entre deux objets). Les résultats à cette échelle sont très bons. En revanche si on calcule cette fois l'erreur d'estimation de la tangente il faut se placer à l'échelle 2ν pour avoir de bons résultats. Il y a donc un certain compromis.

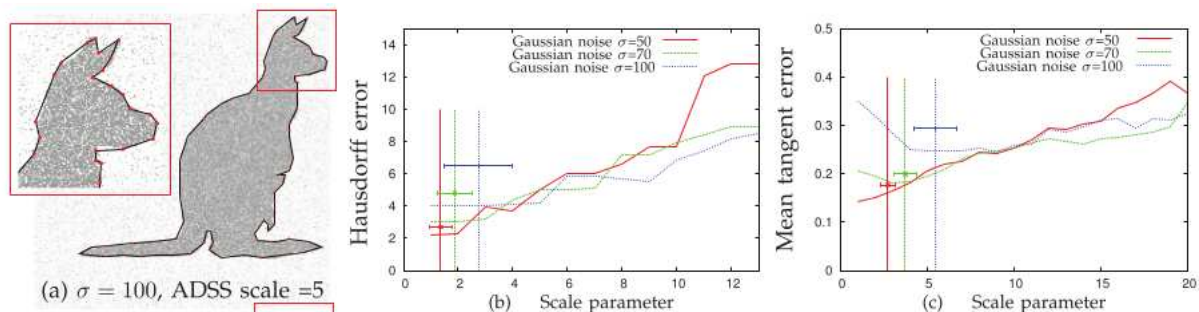


Figure 8: Reconstruction polygonale à échelle ν

Segmentation. Enfin l'utilisation de l'échelle significative permet de repérer automatiquement les zones où la segmentation a échoué.

6 Conclusion

Dans cet article a été introduite une notion originale dite d'échelle significative qui nous renseigne localement sur l'échelle la plus pertinente depuis laquelle le contour doit être considéré, faisant frontière entre un point de vue bruité ou non. Ainsi elle permet de détecter et quantifier localement le bruit parasitant le contour, voir ensuite de le supprimer de manière intelligible en le traitant localement suivant le niveau de bruit déterminé. Par ailleurs la présence de bruit pose fréquemment des problèmes pour l'application d'algorithmes d'estimation géométrique. Là encore l'échelle significative permet de contourner le problème, puisque à cette échelle le bruit n'est plus significatif, et les algorithmes peuvent alors s'appliquer et nous renvoyer un résultat cohérent nous renseignant sur la propriété géométrique recherchée (certes de manière plus grossière).

Quelque soit les applications, comme nous l'avons vu, l'idée est de se placer à la bonne échelle pour opérer et obtenir les informations qui nous intéressent. Cette notion de "microscope mathématiques" est visiblement très à la mode dans la communauté scientifique actuelle, comme c'est le cas notamment dans le développement actifs de théories autour des ondelettes.