

Feuille TP n° 2 : Résolution d'EDO

L'objectif de ce TP est d'implémenter différentes méthodes de calcul numériques d'intégrales.

Pour cela, vous utiliserez le langage *C*. Le code devra être documenter.

Afin de compiler le code, vous devez utiliser un `Makefile`.

Le code devra être structuré.

Vous trouverez sur le kiosk le modèle du code à compléter.

Exercice 1.

Soient n un entier et f une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle $[(a, b)]$. On pose $h = \frac{b-a}{n}$. On rappelle les formules de quadrature 1D suivantes :

- formule composite du point milieu

$$\int_a^b f(t)dt \simeq I_n = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2i+1}{2}h\right)$$

- formule composite du trapèze

$$\int_a^b f(t)dt \simeq I_n = h \left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{1}{2}f(b) \right)$$

- formule composite de Cavalieri-Simpson

$$\int_a^b f(t)dt \simeq I_n = \frac{h}{6} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2i+1}{2}h\right) + f(b) \right)$$

1. Programmer les méthodes de quadrature citées ci-dessus. Une attention particulière devra être porter à l'efficacité des méthodes.

Si f est suffisamment régulière, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \int_a^b f(t)dt - I_n \right| = 0$$

2. Vérifier la convergence de l'erreur pour $n = 2^p$, $p = 0, \dots, 12$ en traçant les courbes d'erreur correspondantes pour les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x)$ sur $(0, \pi)$

2. $f_2(x) = e^x$ sur $(-1, 1)$

3. $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $(0, 1)$

4. $f_4(x) = \sin(\pi x) \cos(\pi x)$ sur $(0, 1)$

5. $f_5(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$ sur $(0, 1)$

6. $f_6(x) = e^{-x^2}$ sur $(0, 1)$

3. Implémenter une méthode de calcul adaptatif d'intégration.
4. Comparer les résultats.