Structures algébriques

$\alpha 1 - MP^*$

1 Groupes

1.1 Rappels

f un morphisme de groupes ; $\ker f = f^{-1}(\{e\})$.

groupe-produit : $(G,+)$ et $(G',\times)$ deux groupes. $\mathcal{G} = G \times G'$ est muni d'une structure de groupe : $(g,g') \bullet (h,h') = (g+g', h\times h')$. $e_{\mathcal{G}} = (e_G, e_{G'})$; l'inverse de (g,g') est $(-g, g'^{-1})$.

1.2 Sous-groupe engendré par une famille

$(G,+)$ un groupe, $\mathcal{F} = \{f_i / i \in \mathcal{I}, f_i \in G\}$ une famille dans G. On appelle *sous-groupe engendré par* $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{gp}(\mathcal{F})$ l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant $\mathcal{F}$. $\mathrm{gp}(\mathcal{F})$ est alors le plus petit sous-groupe de G contenant $\mathcal{F}$ (au sens de l'inclusion).

Prop : $\mathrm{gp}(\mathcal{F})$ est l'ensemble des expressions de la forme : $m_1 f_1 + \ldots + m_k f_k$ où $k \in \mathbb{N}$ (convention : si $k=0$, cette expression vaut 0_G), $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ et $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{F}$. Si $\mathrm{gp}(\mathcal{F}) = G$, on dit que $\mathcal{F}$ *engendre* G.

1.3 Sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Si $k \in \mathbb{Z}$, on pose : $k\mathbb{Z} \overset{def}{=} \{km / m \in \mathbb{Z}\}$. $k\mathbb{Z}$ est alors un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Inversement, tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme.

2 Groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2.1 Définitions

Cougruences : Si $n \in \mathbb{Z}$, deux entiers p et q sont *congrus* modulo n si n divise $p-q$. Cela se note $p \equiv q \bmod n$. $\equiv$ est une relation d'équivalence (pour tout n).

Soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé, on définit la *classe de p modulo n* : $\overline{p} = \{q \in \mathbb{Z} / q \equiv p \bmod n\} = \{p + kn, k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble des classes d'équivalence est une partition de $\mathbb{Z}$; on le note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a : $\mathrm{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$ dès que $n \geqslant 1$.

2.2 Addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On munit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la loi $+$: $\forall \overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \overline{p} + \overline{q} = \overline{p+q}$. Muni de cette loi de composition interne, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe communtatif. $\overline{0}$ en est le neutre, l'opposé de $\overline{p}$ est $\overline{-p}$.

On définit la *surjection canonique* $\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ p & \longmapsto & \overline{p} \end{array}$; c'est un morphisme surjectif de groupes.

Prop : soit $p \in \mathbb{Z}$, $\{\overline{p}\}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \wedge n = 1$.

2.3 Théorème de factorisation

Soit G un groupe, $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ un morphisme. Soit $n \geqslant 1$. Alors : σ se factorise à droite dans f (c-à-d $\exists F : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow G$ morphisme tel que $f = F \circ \sigma$) si et seulement si $n\mathbb{Z} \subset \ker f$ si et seulement si $f(n) = 0_G$.

Lemme chinois : Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$; si $p \wedge q = 1$, alors les groupes (même les anneaux) $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

3 Anneaux

3.1 Généralités

Sous-anneau : A' est un sous-anneau de $(A,+,\times)$ si et seulement si :

1. $1_A \in A'$
2. A' est stable pour $-$ et $\times$

Morphismes d'anneaux : A, A' deux anneaux. $f : A \longrightarrow A'$ est un morphisme d'anneaux si et seulement si :

1. $f(1_A) = 1_{A'}$
2. $\forall (a,b) \in A^2$, $f(a-b) = f(a) - f(b)$ et $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$

$\ker f$ n'est pas seulement un sous-anneau de A : c'est un idéal de A.

Idéal d'anneau : Soit A un anneau ; $I \subset A$ est un idéal si

1. $0_A \in I$
2. I est stable pour la loi $-$
3. I est absorbant, c-à-d : $\forall i \in I, \forall a \in A, (ai \in I) \wedge (ia \in I)$ ou encore $(IA \subset I) \wedge (AI \subset I)$

Propriétés :

- $f : A \longrightarrow A'$ morphisme ; si I' est un idéal de A' alors $f^{-1}(I')$ est un idéal de A
- Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'idéaux de A, alors $\bigcap\limits_{I \in \mathcal{E}} I$ est encore un idéal. On peut donc parler de l'*idéal engendré* par une partie de A : c'est l'intersection des idéaux qui la contiennent.
- On note $\mathrm{Id}(\mathcal{P})$ l'idéal engendré par $\mathcal{P} \subset A$; c'est l'ensemble des éléments de la forme $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i$ où : $k \in \mathbb{N}$, et $\forall i, a_i \in A, x_i \in \mathcal{P}$ si A est commutatif. Si A n'est pas commutatif, c'est $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i a_i'$ (mêmes notations).Lorsque A est commutatif, l'idéal engendré par $\{x\}$ se note $Ax = \{ax, a \in A\}$.

Intégrité : Un anneau A est dit *intègre* s'il vérifie : $\forall (x,y) \in A^2, [(xy = 0) \Longrightarrow (x=0) \vee (y=0))]$. Si A est intègre, on dit que $x \mid y$ (dans A) s'il existe $y' \in A / y = xy'$. On a de plus : $(x \mid y) \Longleftrightarrow (yA \subset xA)$.

Un anneau commutatif intègre A est dit *principal* si tout idéal I de A est *principal*, c'est-à-dire de la forme xA $(x \in A)$. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif) sont principaux. $\mathbb{K}[X,Y]$ est non principal.

Sommes d'idéaux : Soit A commutatif, $I_1, \ldots, I_k$ des idéaux de A. Alors $I_1 + \ldots + I_k = \{x_1 + \ldots + x_k / \forall j, x_k \in I_j\}$ est un idéal de A.

3.2 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Si $\overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on définit $\overline{p} \times \overline{q} = \overline{p \times q}$. Muni de cette seconde loi, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

- Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{m}$ est inversible si et seulement si $m \wedge n = 1$.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ssi n est premier

Factorisation à travers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ un morphisme d'anneaux. Alors : σ se factorise à droite dans f ssi $n\mathbb{Z} \subset \ker f$ ssi $f(n) = 0_A$.

Caractéristique : Soit A un anneau, il existe un unique morphisme dit *canonique* de $\mathbb{Z}$ dans A. Soit f ce morphisme.

- Si $\ker f = \mathbb{Z}$, A est l'anneau nul.
- Si $\ker f = n\mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$, on dit que A est de *caractéristique* n.
- Si $\ker f = \{0\}$, A est de caractéristique nulle.

Propriété : Soit A de caractéristique $n \neq 0$; si A est intègre, alors n est premier.

3.3 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{K}[X]$

- Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$; si $d = p \wedge q$, alors $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.
- *Identité de Bezout* : $(p \wedge q = 1) \Longleftrightarrow (\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 / ap + bq = 1)$.
- Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $M = p \vee q$, alors $p\mathbb{Z} \bigcap q\mathbb{Z} = M\mathbb{Z}$.
- Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, on décompose p et q en produit de facteurs premiers : $p = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$, $q = \prod_{i=1}^{r} p_i^{l_i}$, alors $p \wedge q = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min(m_i, l_i)}$ et $p \vee q = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max(m_i, l_i)}$.
- *Lemme de Gauss* : Soit $m \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, alors $[(m \mid ab) \wedge (m \wedge a = 1)] \Longrightarrow [m \mid b]$.

Toutes ces propriétés restent vraies dans $\mathbb{K}[X]$, en remplaçant opportunément les entiers par des polynômes.

4 Algèbres

Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif), une $\mathbb{K}-$algèbre est un ensemble E muni de trois lois $+, \times, \cdot$ où $+, \times$ sont internes, $\cdot$ est externe $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ telles que :

1. $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
2. $(E, +, \times)$ est un anneau.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, \lambda(x \times y) = (\lambda x) \times y = x \times (\lambda y)$.

4.1 Exemples

$\mathbb{K}[X]$, $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}-$algèbres. Si E est un $\mathbb{K}-ev$, $\mathcal{L}(E)$ est une $\mathbb{K}-$algèbre.

4.2 Définitions

Soit $(E, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}-$algèbre, $F \subset E$ est une *sous-algèbre* de E si :

1. $1_E \in F$
2. F est stable pour $+$ et $\times$
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}, x \in F$, alors $\lambda x \in F$.

Morphisme d'algèbres : Soit E, E' deux $\mathbb{K}-$algèbres, $f : E \longrightarrow E'$ est un morphisme d'algèbres si

1. f est linéaire
2. $\forall (x,y) \in E$, $f(xy) = f(x)f(y)$
3. $f(1_E) = f(1_{E'})$.

f est aussi un morphisme d'anneaux.
Idéal d'algèbre : $I \subset E$ est un idéal si :

1. $0 \in I$
2. I est stable par soustraction
3. I est absorbant pour $\times$

On peut aussi établir que I est un sev absorbant.

4.3 Sous-algèbres de la forme $\mathbb{K}[a]$

Soit E une $\mathbb{K}-$algèbre, $a \in E$, $P \in \mathbb{K}[X]$; si $p = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i X^i$, on pose $P(a) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i X^i$. Alors $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres. $\mathrm{Im}(\varphi) = \{P(a) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ est donc une sous-algèbre de E que nous noterons $\mathbb{K}[a]$. On l'appelle aussi ***sous-algèbre de E engendrée par a***. (c'est la plus petite sous-algèbre de E qui contient a). $\mathbb{K}[a]$ est une sous-algèbre commutative.

- Si $\ker(\varphi) = \{0\}$, φ est injective. Alors la famille $(a^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[a]$, donc $\mathbb{K}[a]$ n'est pas de dimension finie.
- Si $\ker(\varphi) \neq \{0\}$, soit $P \in \ker(\varphi) \backslash \{0\}$ de degré minimal $m \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, $\mathbb{K}[a]$ est une sous-algèbre de dimension m. $\mathcal{F} = \{1, a, a^2, \dots, a^m\}$ est une base de $\mathbb{K}[a]$.

Exemples : $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{Q}-$algèbre. On dit que $a \in \mathbb{C}$ est ***transcendant*** si $\mathbb{Q}[a]$ n'est pas de dimension finie. Par exemple, e et π sont transcendants. Si en revenche $\mathbb{Q}[a]$ est de dimension finie, on dit que a est ***algébrique***. Par exemple $\sqrt{2}$, $\sqrt[2009]{56}$, i sont algébriques.

Espaces vectoriels

$\alpha 2 - MP^*$

1 Espaces vectoriels

1.1 Sommes et sommes directes finies

E est un espace vectoriel

- $f \in \mathcal{L}(E)$, $E = K \oplus \ker f$; alors $f|_K$ est un isomorphisme de K sur $\mathrm{Im}(f)$
- Soit E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\exists F / E = \ker f \oplus F$ et $f(F) \subset F$, alors $F = \mathrm{Im}\, f$.
- *Projecteurs* : soit E un ev, $p \in \mathcal{L}(E)$,
  1. Si $p \circ p = p$ alors $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p$ et $\mathrm{Im}\, p = \ker(p - Id)$; p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$.
  2. Si $E = F \oplus G$, alors $p : x = x_G + x_F \longrightarrow x_F$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ vérifie $p \circ p = p$, $\mathrm{Im}\, p = F$ et $\ker p = G$. C'est le projecteur sur F parallèlement à G.
- *Symétries* : soit $E = F \oplus G$ un ev sur $\mathbb{K}$. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s : x = x_F - x_G$. Si $\mathrm{carac}(\mathbb{K}) = 2$ alors $s = Id$. Sinon, $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie ssi (def) $s \circ s = Id$. Dans ce cas $E = \ker(s - Id) \oplus \ker(s + Id)$.
- Notons $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques. Alors $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.

1.2 Sommes quelconques

Soit E un ev, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev. $\sum\limits_{i \in I} F_i$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}$ où $k \in \mathbb{N}$ et $\forall j, i_j \in I$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. $\sum F_i$ est un sev de E. $\sum\limits_{i \in I} F_i = \mathrm{Vect}(\bigcup\limits_{i \in I} F_i)$.La somme est directe si : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i_1, \ldots, i_k$ 2 à 2 $\neq, (\sum x_{i_j} = 0) \Longrightarrow (\forall j, x_{i_j} = 0)$.

1.3 Homothéties

- Soit E un ev, $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une homothétie ssi $f \in \mathrm{Vect}(Id)$ ssi $\forall x \in E, (x, f(x))$ est liée.
- Soit E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
  1. Si $\forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f$ alors $f \in \mathrm{Vect}(Id)$
  2. Si $\forall g \in \mathrm{GL}(E), f \circ g = g \circ f$ alors $f \in \mathrm{Vect}(Id)$
  3. Si de plus E est euclidien, alors : Si $\forall g \in \mathcal{O}(E), f \circ g = g \circ f$ alors $f \in \mathrm{Vect}(Id)$

1.4 Hyperplans

- Soit E un ev, F sev de E est un *hyperplan* si $\exists D = \mathrm{Vect}(x_0) / E = F \oplus D$. Si de plus E est de dimension finie, F est un hyperplan ssi $\dim E = \dim F + 1$.
- F est un hyperplan de E ssi $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \varphi \neq 0$ telle que $F = \ker \varphi$.
- Soit E un ev, H hyperplan de E, $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker \varphi$. Soit $H^\circ \overset{def}{=} \{\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) / H = \ker \psi\}$. Alors $H^\circ = \mathrm{Vect}(\varphi)$.
- *Codimension* : on dit que F sev de E est de *codimension finie* s'il possède un supplémentaire G de dimension finie. Dans ce cas on pose $\mathrm{codim}\, F = \dim G$

1.5 Résultats propres à la dimension finie

- *Formule de Grassman* : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \bigcap G)$.
- $\dim E = \dim F + \mathrm{codim}\, F$.
- *Formule du rang* : $\forall f \in \mathcal{L}(E), \dim E = \mathrm{rg}\, f + \dim \ker f$.
- $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$
- $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

2 Dualité

1. Si E est un $\mathbb{K} -$ ev, on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ son *dual*.
2. On a une forme bilinéaire $\begin{array}{ccc} E^* \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f, x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$, notée aussi $(f \mid x)$.

2.1 Cas où E est de dimension finie

- $\dim E^* = \dim E$
- Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on peut lui associer une base $\mathcal{B}^* = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E^* (*base duale* de $\mathcal{B}$) telle que pour tout $x = \sum x_i e_i$, on a $\varepsilon_i(x) = x_i$. ε_i est la i-ième forme coordonnée sur $\mathcal{B}$.
- Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases de E, $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ la matrice de passage entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors ${}^tP = \mathcal{M}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}$.

2.2 Base antéduale

- Toute base $\mathcal{C}$ de E^* est la duale d'une unique base $\mathcal{B}$ de$E$ (son *antéduale*).
- E un ev de dimension n finie. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_r)$ une famille de r formes linéaires. $\mathcal{F}$ engendre E^* ssi $\bigcap\limits_{i=1}^{r} \ker f_i = \{0\}$.

2.3 Orthogonalité entre E et E^*

- E un ev. Si $\mathcal{P} \subset E$, on note $\mathcal{P}^\circ = \{f \in E^* / \forall x \in \mathcal{P}, f(x) = 0\}$.
  1. $\mathcal{P}^\circ$ est un sev de E^*
  2. $(\mathrm{Vect}\, \mathcal{P})^\circ = \mathcal{P}^\circ$
  3. Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ alors $\mathcal{Q}^\circ \subset \mathcal{P}^\circ$
- Si E est de dimension finie, F sev de E, alors $\dim F^\circ = \mathrm{codim}\, F$
- Soit E un ev, si $\mathcal{P} \subset E^*$, on note $\mathcal{P}^\circ = \{x \in E / \forall f \in \mathcal{P}, f(x) = 0\}$.
  1. $\mathcal{P}^\circ$ est un sev de E
  2. $(\mathrm{Vect}\, \mathcal{P})^\circ = \mathcal{P}^\circ$
  3. Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q} \subset E^*$ alors $\mathcal{Q}^\circ \subset \mathcal{P}^\circ$
  4. Si E est de dimension finie, F sev de E^*, alors $\dim F^\circ = \mathrm{codim}\, F$
- E de dimension finie, F sev de E, alors $F^{\circ\circ} = F$ (même énoncé si F sev de E^*).

3 Théorème de décomposition des noyaux

Notations : si E est un ev, $\mathcal{L}(E)$ est une $\mathbb{K} -$ algèbre. Si $P = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors on pose $P(u) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i u^i$ en convenant $u^0 = Id$. $(P(u))(x)$ est noté $P(u)(x)$.

3.1 Premières propriétés

- E ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

  1. Si $P \mid Q$ alors $\ker P(u) \subset \ker Q(u)$ et $\operatorname{Im} P(u) \supset \operatorname{Im} Q(u)$
  2. Si $D = P \wedge Q$, $\ker P(u) \bigcap \ker Q(u) = \ker D(u)$.

- Soit $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, alors : $\sum\limits_{i=1}^{m} \ker P_i(u)$ est directe.

3.2 Théorème de décomposition des noyaux

E ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entre eux ; soit $P = \prod\limits_{i=1}^{m} P_i$. Alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker P_i(u).$$

Calcul matriciel

$\alpha 3 - MP^*$

1 Matrices et structure

- indexation : $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,2} & \dots & m_{p,q} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps (commutatif en général).
- Soit $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p \\ 1\leqslant l\leqslant q}}$; la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p \\ 1\leqslant l\leqslant q}}$ forme une base de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et vérifie : $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$
- $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont *semblables* si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / N = P^{-1}MP$.
- $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont *équivalentes* si $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K}) / N = PMQ^{-1}$.
- M et N sont équivalentes ssi $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} N$. En particulier si $\operatorname{rg} M = r$ alors M est équivalente à la *réduite canonique* de rang r $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

1.1 Ecriture par blocs

- Une combinaison linéaire de matrices décomposées par blocs se traite comme une matrices de scalaires, pour peu que la somme des blocs ait un sens.
- Il en est de même pour le produit matriciel.

1.2 Application

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,r} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{r,r} \end{pmatrix}$ (M est triangulaire par blocs). Alors : $\det M = \prod_{i=1}^{r} \det A_{i,i}$.

1.3 Intervention des matrices-blocs

- Soit E un ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose : $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$ avec $E_1, \ldots, E_r$ stables par u. On note $u_i = u|_{E_i}^{E_i}$ l'induit de u sur E_i. Pour chaque E_i on construit une base $\mathcal{B}_i$; la base $\mathcal{B}$ résultant de la concaténation des $\mathcal{B}_i$ est une base de E. Soit $A_i = M_{\mathcal{B}_i} u_i$, on a alors $M_{\mathcal{B}} u = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_r)$.
- réciproque vraie

1.4 Opérations élémentaires

On pose : $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant n}}$, $M_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note $M = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & \cdots & L_n \end{pmatrix}$.

- Faire $M \longleftarrow M \times M_{i,j}(\lambda)$ revient à faire $C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i$.
- Faire $M \longleftarrow M_{i,j}(\lambda) \times M$ revient à faire $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$.

1.5 Inversion des matrices carrées

- Méthode de la comatrice : soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{M}$ la comatrice de M, où $(\widetilde{M})_{i,j} = (-1)^{i+j} \times \det \text{mineur } M_{i,j}$. Alors $M {}^t\widetilde{M} = {}^t\widetilde{M} M = I_n \det M$.
- Méthode du système linéaire : $M \in GL_n(\mathbb{K})$, $Y \in \mathbb{K}^n$, on résoud : $MX = Y$ par rapport à X et l'expression du résultat donne les coefficients de M^{-1}.
- La connaissance d'un polnôme annulateur peut éventuellement donner une expression polynômiale de M^{-1}.
- Décomposition QR : $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, on note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{C}$ la base de $\mathbb{R}^n$ telle que $M_{\mathcal{B}_0}\mathcal{C} = M$. On a : $\begin{array}{ccc} \text{B.O.N} \quad \mathcal{B}_0 & \xrightarrow{M} & \mathcal{C} \\ & & \downarrow \scriptsize\begin{array}{l}\text{Gram}-\text{Schmidt} \\ \text{T triang. sup}\end{array} \\ & & \mathcal{B} \quad \text{B.O.N} \end{array}$; on écrit donc $U = MT$ avec $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $T \in GL_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Donc $M = UT^{-1}$.

1.6 Trace

- Cas d'une matrice carrée : $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.
  1. tr est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
  2. si $A \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, $BA \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$ et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
  3. si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.
- Cas d'un endomorphisme : E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit : $\operatorname{tr} u \overset{def}{=} \operatorname{tr} M_{\mathcal{B}} u$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.
  1. $\operatorname{tr} \in (\mathcal{L}(E))^*$
  2. Si E, F sont de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F), v \in \mathcal{L}(F,E)$, alors $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.
  3. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in GL(E)$, alors $\operatorname{tr}(v^{-1}uv) = \operatorname{tr} u$
  4. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de rang r, alors $\operatorname{tr} p = 1_{\mathbb{K}} \cdot r$ pas nécéssairement non nul.

2 Déterminants

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, la forme développée de $\det M$ est $\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} m_{\sigma(k),k}$.

2.1 Déterminant de Vandermonde

On montre par récurrence sur n que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

2.2 Dérivée d'un déterminant

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, $\Delta(t) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1(t) & \cdots & C_n(t) \end{vmatrix}$ où $\forall i, j$, $a_{i,j} : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

1. Si $k = 0$, alors Δ est $\mathcal{C}^0$ comme polynôme de fonctions $\mathcal{C}^0$.
2. Si $k \geqslant 1$, $\Delta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ et : $\Delta'(t) = \det(C_1'(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t), \ldots, C_n(t)) + \ldots + \det(C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n'(t))$. Le résultat reste vrai en remplaçant les colonnes par les lignes de Δ.

3 Discussion des systèmes linéaires

On appelle *système linéaire* tout système d'équation équivalent à un système de la forme $MX = Y$ où $M \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ donnée, $Y \in \mathbb{K}^p$ donné et $X \in \mathbb{K}^q$ inconnu. Soit $S : MX = Y$ un système linéaire, on lui définit $S_0 : MX = 0$ *système homogène associé*. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de S, $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de S_0 ; $\mathcal{S}_0$ est un sev de $\mathbb{K}^q$. $\mathcal{S}$ peut être vide ; dans ce cas on pose $\dim \mathcal{S} \overset{def}{=} -\infty$; sinon, on pose $\dim \mathcal{S} \overset{def}{=} \dim \mathcal{S}_0$. Si $X_0 \in S, \forall X \in \mathbb{K}^q, [X \in \mathcal{S}] \iff [(X - X_0) \in \mathcal{S}_0]$.

3.1 Cas des systèmes linéaires de Cramer

$MX = Y$ est un *système de Cramer* si M est carrée et inversible. $\forall Y \in \mathbb{K}^n$, $MX = Y$ possède alors une unique solution $X = M^{-1}Y$.

- Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $MX = Y$ est de Cramer ssi $\mathcal{S}_0 = \{0\}$
- *Formules de Cramer* : $M = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix}$, $MX = Y$ admet pour solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où :

$$\forall i,\, x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, Y, C_{i+1}, \dots, C_n}{\det M}$$

3.2 Cas où $M \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\operatorname{rg} M = p$

Supposons $p < q$: $\operatorname{rg}(C_1, \dots, C_q) = p$. On extrait de $(C_1, \dots, C_q)$ une famille libre à p éléments, et cette famille engendre $\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_q)$. Par exemple si $(C_1, \dots, C_p)$ est libre :

- S possède au moins une solution $\forall Y$
- Y donné ainsi que $\xi_{p+1}, \dots, \xi_q \in \mathbb{K}$, alors $\exists X \in \mathcal{S}$ unique dont les composantes vérifient $\forall i > p, x_i = \xi_i$.

On peut écrire $M = \begin{pmatrix} A & \big| & B \end{pmatrix}$ avec $A \in GL_p(\mathbb{K})$, et $X = \begin{pmatrix} \dfrac{X_1}{X_2} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \xi_{p+1} \\ \vdots \\ \xi_q \end{pmatrix}$; alors $X = \begin{pmatrix} \dfrac{A^{-1}(Y - BX_2)}{X_2} \end{pmatrix}$. On a de plus $\dim \mathcal{S} = q - p$.

3.3 Cas général

$MX = Y$, $M \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} M = r$.

- Si $r = p$, voir 3.2
- Supposons $r < p$, $\operatorname{rg}(L_1, \dots, L_p) = r$. Supposons par exemple $(L_1, \dots, L_r)$ libre. $\forall s > r, \exists \lambda_{1,s}, \dots, \lambda_{r,s} \in \mathbb{K} / L_s = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i,s} L_i$. Avec ces notations, $\mathcal{S} \neq \varnothing$ ssi

  $$\forall s > r, y_s = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i,s} y_i \quad (\mathcal{C}_s)$$

  Si $\mathcal{C}_{r+1}, \dots, \mathcal{C}_p$ sont toutes vérifiées, $\mathcal{S}$ est aussi l'ensemble des solutions du système $S' \left| \begin{array}{l} L_1 X = y_1 \\ \vdots \\ L_r X = y_r \end{array} \right.$. S' est équivalent à S car ils ont même ensemble de solutions. La matrice de S' est $\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ Lr \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ de rang r, ce qui nous ramène à 3.2.

Si $\mathcal{S} = \varnothing$, S est *incompatible* ; sinon S est *compatible*.

Réduction des endomorphismes

$\alpha 4 - MP^*$

1 Généralités

1.1 Éléments propres

E un $\mathbb{K}-$ev, $u \in \mathcal{L}(E)$

- $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0$ et si $\exists \lambda \in \mathbb{K}/u(x) = \lambda x$. Dans ce cas λ est unique et on l'appelle *valeur propre* de u associée à x.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si $\exists x \in E, x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. On dit que x est un *vecteur propre* associé à λ.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id)$. λ est valeur propre de u ssi $E_\lambda \neq 0$. E_λ est le *sous-espace vectoriel propre* associé à λ.
- L'ensemble des valeurs propres s'appelle le *spectre* de u, noté $\mathrm{Sp}\,(u)$.

1.2 Théorème d'indépendance linéaire

E un ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{I}$ ensemble d'indice éventuellement fini.

- Si $(\lambda_i)_{i \in \mathcal{I}}$ est une famille de scalaires 2 à 2 différents, alors les E_{λ_i} sont en somme directe.
- Si $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 différentes, alors cette famille est libre.

Corollaire : si E est de dimension finie n, alors $\mathrm{card}\,\mathrm{Sp}\,(u) \leqslant n$.

1.3 Diagonalisabilité

E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable si $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $M_{\mathcal{B}}u$ soit diagonale.

1. u est diagonalisable ssi
2. $\exists (a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ une famille de scalaires telle que $E = \bigoplus\limits_{i \in \mathcal{I}} E_{a_i}$ ssi
3. $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} E_\lambda$.

Remarque : (1.) $\Longleftrightarrow$ (2.) est vrai même en dimension infinie.

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $u : X \longmapsto MX$, X est un vecteur propre de M ssi X est un vecteur propre de u ; de même pour les valeurs propres, les sous-espaces propres.

M est diagonalisable ssi M est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire : M est diagonalisable ssi $\exists D$ diagonale, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PDP^{-1}$.

2 Le polynôme caractéristique

2.1 Définition de χ_u

E un ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$. $\chi_u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(u - \lambda Id) \end{array}$. χ_u est une fonction polynômiale de degré n de la forme : $\chi_u = (-1)^n (X^n - \mathrm{tr}\,(u) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u)$.

Propriété : les valeurs propres de u sont les zéros de χ_u.

λ est une valeur propre de *multiplicité* p si c'est un zéro p-uple de χ_u.

On dit que u est *scindé* si χ_u l'est. Dans ces conditions, soit $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, m_i la multiplicité de la valeur propre λ_i, on a $\mathrm{tr}\, u = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \lambda_i$ et $\det u = \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^{m_i}$.

2.2 Lien entre $\chi_u$et les sous-espaces propres

E un ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$, si λ est un zéro p-uple de χ_u alors $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant p$.

2.3 Premières conditions de diagonalisabilité

E de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$; on a les conditions suivantes pour que u soit diagonalisable :

1. C.N :u scindé
2. C.S : χ_u possède n racines (χ_u est *séparablement scindé*)
3. C.N.S : u est scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u), \dim E_\lambda = \mathrm{mult}\,(\lambda)$

2.4 Réduction des endomorphismes monogènes

E ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit *monogène* si $\exists x \in E/\mathcal{B} = (x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ base de E. Soit alors $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}u = \begin{pmatrix} 0 & & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ où $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$. Soit $P = X^n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, alors $\chi_u = (-1)^n P$. M est appelée *matrice-compagnon* du polynôme P.

- Si u est monogène, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, $\dim E_\lambda = 1$.
- Dans ce cas, u est diagonalisable ssi χ_u est séparablement scindé.

2.5 Remarques

En toute généralité, $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \chi_M = \chi_{{}^tM}$ et $\forall (M, N) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2, \chi_{MN} = \chi_{NM}$.

3 Réduction des endomorphismes autoadjoints

3.1 Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques)

Soit E ev réel euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est *symétrique* si $\forall (x, y) \in E^2, (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$.

Propriété : $\mathcal{B}$ une BON, u est symétrique ssi $M_{\mathcal{B}}u$ est une matrice symétrique.

3.2 Lemmes

1. Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Soit F sev de E stable par u ($u(F) \subset F$) ; alors $F^\perp$ est stable par u.
2. Soit E un $\mathbb{R}-$ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un sev F de E non nul de dimension $\leqslant 2$ stable par u.
3. Soit E un ev euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors χ_u possède au moins un zéro réel

3.3 Le théorème spectral

E ev euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors :

1. u est scindé
2. plus précisément, u est diagonalisable
3. $\exists B$ BON telle que $M_{\mathcal{B}}u$ soit diagonale

Corollaires :

- Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 différentes sont 2 à 2 orthogonaux
- Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors :
  1. M est scindé
  2. M est diagonalisable
  3. $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})/P^{-1}MP$ soit diagonale.

4 Applications de la diagonalisation

4.1 Première méthode de calcul de puissance

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si M est diagonalisable, on construit $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$ (voire $k \in \mathbb{Z}$ si M est inversible.)

Puissances d'un endomorphisme : même principe en dimension finie. Si $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, alors $\exists!(u_1, \ldots, u_r) \in \mathcal{L}(E)^r$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, u^k = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i^k u_i$. Si P_i est un polynôme tel que $P_i(u_j) = \delta_{i,j}$, alors $u_i = P_i(u)$. En outre, u_i est le projecteur associé à E_{λ_i}.

4.2 Résolution des systèmes différentiels à coefficients constants

Un *système différentiel à coefficients* constants est de la forme : $X' = MX + A(t)$ où $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$, $A : t \in I \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix}$ où les a_i sont $\mathcal{C}^0$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. L'inconnue est la fonction $t \in I \longrightarrow X(t)$ dérivable. Si M est diagonalisable, $M = PDP^{-1}$ et $(X' = MX + A(t)) \iff (Y' = DY + B(t))$ avec $X = PY$ et $A(t) = PB(t)$, plus simple à résoudre.

5 Triangulation des endomorphismes

E ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ est *triangulable* si $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire.

5.1 Théorème de triangulabilité

Avec ces notations, u est triangulable ssi u est scindé.

Lemme : si $u \in \mathcal{L}(E)$ est scindé et G stable par u, alors $u|_G^G$ est scindé.

5.2 Applications

- système différentiel à coefficients constants
- Si E est de dimension finie et si u est scindé, alors u est nilpotent ssi $\mathrm{Sp}\,u = \{0\}$

5.3 Méthodes de triangulation

- E un ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ scindé, $\mathrm{Sp}\,u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Si $\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,u} E_\lambda$ est de dimension $n-1$, on construit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E adaptée à cette somme directe (hormis e_n choisi). On a alors : $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & m_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_r & \vdots \\ & & & m_{n,n} \end{pmatrix}$.

  On obtient la dernière colonne en décomposant $u(e_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,n} e_i$.
- Cas où $\dim E = 2$, u scindé non diagonalisable. u a alors une valeur propre double λ et $\dim E_\lambda = 1$. On adapte une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E et on a :$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$.
- Cas où $\dim E = 3$, u scindé non diagonalisable.
  - cas 1 : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\mathrm{mult}(\lambda) = 2$, $\mathrm{mult}(\mu) = 1$. $E = \ker(u - \lambda Id)^2 \oplus \ker(u - \mu Id)$, $\dim E_\lambda = \dim E_\mu = 1$. Soit $E_\lambda' = \ker(u - \lambda Id)^2$, on choisit $e_1 \in E_\lambda' \backslash E_\lambda$, $e_2 = (u - \lambda Id)(e_1)$, $e_3 \in E_\mu \backslash \{0\}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Alors $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

  - cas 2 : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$, $\dim E_\lambda = 2$. On pose $v = u - \lambda Id$. $\chi_u = (\lambda - X)^3$ et $\chi_u(u) = 0$ montre que $v^3 = 0$. On choisit $e_1 \notin \ker v$, $e_2 = v(e_1) \in \ker v$, et on complète en une base (e_2, e_3) de $\ker v$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
  - cas 3 : (mêmes notations) $\dim E_\lambda = 1$, on suppose $\dim \ker v^2 = 3$. $\exists \mathcal{P}$ plan vectoriel tel que $\ker v^2 = \ker v \oplus \mathcal{P}$. En posant $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base de $\mathcal{P}$, on aboutit à une absurdité. Donc $\dim \ker v^2 = 2$; on choisit $e_1 \notin \ker v$, $e_2 = v(e_1)$, $e_3 = v(e_2)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$; alors $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

6 Polynômes et réduction

6.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Soit E ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, on a : $\chi_u(u) = 0$.

Soit μ_u le *polynôme minimal* de u, c'est-à-dire le polynôme unitaire de degré minimal tel que $\mu_u(u) = 0$.

Propriété : $\chi_u \mid \mu_u^n$.

6.2 Polynômes et spectre

E ev quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P(u) = 0$, alors les valeurs propres de u sont à chercher parmi les zéros de P : $\mathrm{Sp}(u) \subset P^{-1}(\{0\})$. En particulier, les valeurs propres de u sont les zéros de μ_u.

6.3 Polynômes et diagonalisabilité

E ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable ssi μ_u est scindé à zéros simples ssi $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ non nul scindé à zéros simples tel que $P(u) = 0$.

6.4 Polynômes et triangulabilité

E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est triangulable ssi u est scindé ssi μ_u est scindé ssi $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ non nul scindé tel que $P(u) = 0$.

6.5 Polynômes et calcul de puissance

E ev quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose connu $P \in \mathbb{K}[X]$non nul tel que $P(u) = 0$. Soit $P' \in \mathbb{K}[X]$, l'identité de division euclidienne $P' = PQ + R$ avec $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\deg R < \deg P$ montre que $P'(u) = P(u) \circ Q(u) + R(u) = R(u)$. Pour évaluer $P'(u)$, il suffit de connaître les $u^k, 1 \leqslant k < \deg P$.

7 Sous-espaces stables

7.1 Lien avec les polynômes annulateurs

E un ev quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E stable par u, $v = u|_F^F$, $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $P(u) = 0$, on a aussi $P(v) = 0$.
- $\chi_v \mid \chi_u$.

7.2 Lien avec la diagonalisabilité

E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est diagonalisable et si F est un sev stable alors $u|_F^F$ est encore diagonalisable.

Corollaire : E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Un sev F de E est stable par u ssi il est de la forme $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} F_i$ où $\forall i$, F_i est un sev de E_{λ_i}.

7.3 Lien avec la triangulation

E un ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ scindé. Si F est un sev stable, alors $u|_F^F$ reste scindé et triangulable.

Remarque 1 : décomposition de Dumford d'un endomorphisme scindé. $u \in \mathcal{L}(E)$ scindé, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. $m_i = \mathrm{mult}(\lambda_i)$, $E'_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i Id)^{m_i}$.

1. $\forall i$, E'_{λ_i} est stable par u ; on pose $v_i = u|_{E'_{\lambda_i}}^{E'_{\lambda_i}}$; alors $v_i - \lambda_i Id|_{E_{\lambda_i}}$ est nilpotent.

2. $E = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} E'_{\lambda_i}$; il existe une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme directe telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale par bloc. $M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(T_1, \ldots, T_r)$ où chaque T_i est de la forme $T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ & \ddots & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$.

Remarque 2 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists!(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2 / u = d + n$ où d est diagonalisable et n est nilpotent.

7.4 Hyperplans stables

E ev de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{H}$ hyperplan d'équation $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. Soit $M = M_{\mathcal{B}}(u)$, $\mathcal{H}$ est stable par u ssi $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tM$. Si M est connue, on obtient ainsi tous les hyperplans stables en cherchant les vecteurs propres de ${}^tM$.

8 Commutants d'un endomorphisme

8.1 Généralités

E de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / v \circ u = u \circ v\}$. $C(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathbb{K}[u] \subset C(u)$. De plus, si $\dim E = n$,

- $1 \leqslant \dim \mathbb{K}[u] \leqslant n \leqslant \dim C(u) \leqslant n^2$
- $(\dim \mathbb{K}[u] = n) \iff (\dim C(u) = n)$
- $\dim C(u) \equiv n \bmod 2$
- si $n = 3$, $\dim C(u) \in \{3, 5, 9\}$.

8.2 Lien avec la diagonalisabilité

E ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. $v \in C(u)$ ssi v laisse stable tous les E_{λ_i}.

8.3 $\dim E = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$u \in \mathcal{L}(E)$ scindé non diagonalisable. On peut réduire $M_{\mathcal{B}}(u)$, $\mathcal{B}$ bien choisie, à l'une des formes suivantes :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 1 & \lambda & \\ \hline & & \mu \end{array}\right), \quad M_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 1 & \lambda & \\ \hline & & \lambda \end{array}\right) \text{ ou } M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Pour $v \in \mathcal{L}(E)$, $uv = vu$ ssi $M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M_{\mathcal{B}}(v)$ commutent. Chercher $M_{\mathcal{B}}(v)$ avec 9 coefficients indéterminés conduit à des calculs simples.

Suites numériques

$\alpha 5 - MP^*$

1 Rappels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

1.1 Prérequis

Notions de majorant, minorant, borne sup, borne inf, max, min

1.2 Complétude de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

On appelle *extraction* toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : Si u_n est une suite complexe bornée, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge.

Une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0, \forall p > 1, |u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon$$

Propriété : toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est vraie dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ du fait de leur complétude.

Lemme : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, s'il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ ait une limite $l \in \mathbb{C}$, alors (u_n) a une limite et $\lim u_n = l$.

$\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

1.3 Densité de $\mathbb{Q}$

1.3.1 Morphismes (hors programme)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de corps. Alors $f = Id$.

1.3.2 Nombres dyadiques

Soit $\mathbb{D}_2 = \{\frac{p}{2^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$; $\mathbb{D}_2$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1.4 Théorème de Cesàro

(u_n) une suite de limite $l \in \mathbb{C}$. Posons $v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$, alors $v_n \longrightarrow l$.

2 Suites récurrentes

2.1 Suites particulières

Soit $(a_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$, $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les suites (u_n) telles que $u_{n+1} = a_n u_n + b_n$ s'expriment facilement en fonction de a_n, b_n et u_0.

On appelle *suite homographique* toute suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ et $ad - bc \neq 0$. On forme $l = \frac{al+b}{cl+d} \Longleftrightarrow (cl^2 + (d-a)l - b = 0 \quad (E))$.

1. Si $\Delta_E \neq 0$: (E) a deux racines $l_1 \neq l_2$.
   - si $u_0 = l_1$ ou $u_0 = l_2$, alors (u_n) est constante
   - sinon, la suite $v_n = \frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$ est géométrique
2. Si $\Delta_E = 0$, (E) a un zéro double l.
   - Si $u_0 = l$ alors $u_n \longrightarrow l$
   - sinon, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq l$ et $v_n = \frac{1}{u_n - l}$ est arithmétique.

2.2 Suites récurrentes générales

2.2.1 Propriétés liées aux points fixes

$f : I \longrightarrow I$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) ; si $a \in I$, on peut définir (u_n) par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est $\mathcal{C}^0$ et (u_n) converge vers $l \in I$ alors $f(l) = l$.

2.2.2 Liens avec la monotonie de f

1. Si f est croissante, alors (u_n) est monotone.
2. Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et n'ont pas même sens de variation.

Séries numériques

$\alpha 6 - MP^*$

1 Généralités

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on peut lui associer $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Soit $(\sigma_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, il existe une unique suite (u_n) telle que $\sigma_n = S_n$: c'est $u_0 = \sigma_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$.

On dit que la *série* $\{u_n\}$ *converge* si la suite (S_n) converge. Lorsque c'est le cas, la *somme* de la série $\{u_n\}$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

On utilise la notation $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\sum u_n$ pour désigner la série u_n.

On appelle *reste à l'ordre* N de la série la somme $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$. On a toujours : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} R_N = 0$.

Structure d'ev, linéarité : Si $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ convergent, alors :

- $\{u_n + v_n\}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\{\lambda u_n\}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

L'ensemble des suites (u_n) telles que la série $\{u_n\}$ converge est donc un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Sur ce sev, l'application $(u_n) \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire.

Critère de Cauchy : Soit $\{u_n\}$ une série dans $\mathbb{K}$, elle converge ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \forall p > 1, |u_n + \ldots + u_{n+p}| \leqslant \varepsilon$

2 Étude des séries positives

Une série $\{u_n\}$ est *positive* si :

- $\forall n \geqslant 0, u_n \in \mathbb{R}$
- $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant 0$

2.1 Sommes partielles et convergence

(u_n) une série positive, (S_n) associée à (u_n). Alors (S_n) croît. La série $\{u_n\}$ est convergente ssi la suite (S_n) est majorée.

2.2 Règles de comparaison

1. Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux séries positives, telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
   - Si $\{v_n\}$ converge alors $\{u_n\}$ converge
   - Si $\{u_n\}$ diverge alors $\{v_n\}$ diverge
2. Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux séries positives. Si $u_n \sim v_n$, les deux séries sont de même nature.

2.3 Sommation des relations de comparaison

Soit deux suites réelles positives (u_n) et (v_n) de sommes partielles respectives (S_n) et (S'_n).

1. Si $\{v_n\}$ diverge et $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{O}(S'_n)$.
2. Si $\{v_n\}$ diverge et $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{o}(S'_n)$.
3. Si $\{v_n\}$ diverge et $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim S'_n$.

Soit R_n et R'_n les restes à l'ordre n respectifs de (u_n) et (v_n)

1. Si $\{v_n\}$ converge et $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $\{u_n\}$ converge et $R_n = \mathrm{O}(R'_n)$.
2. Si $\{v_n\}$ converge et $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\{u_n\}$ converge et $R_n = \mathrm{o}(R'_n)$.
3. Si $\{v_n\}$ converge et $u_n \sim v_n$, alors $\{u_n\}$ converge et $R_n \sim R'_n$.

2.4 Règle de d'Alembert

$\{u_n\}$ série réelle strictement positive pour n assez grand.

1. Si $\exists k < 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ pour n assez grand, alors $\{u_n\}$ converge
2. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite $l < 1$, alors $\{u_n\}$ converge
3. Si $\exists k \geqslant 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k$ pour n assez grand, alors $\{u_n\}$ diverge
4. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite $l > 1$, alors $\{u_n\}$ diverge
5. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{\geqslant} 1$, alors $\{u_n\}$ diverge

Aucune réciproque, aucun résultat si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{\leqslant} 1$.

2.5 Comparaison entre série et intégrale

$f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ $\mathcal{C}^0_m$, décroissante. Pour $n \geqslant n_0$, soit $u_n = f(n)$.

1. Les séries de terme général $v_n = u_n - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ et $v'_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - u_n$ sont positives et convergentes.
2. La suite de terme général $A_n = u_{n_0} + \ldots + u_n - \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
3. $\{u_n\}$ converge ssi $n \longmapsto \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie.

2.6 Règle de Riemann

$\{u_n\}$ une série réelle positive

1. Si $\exists \alpha > 1$ tel que $u_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n^\alpha})$ alors u_n converge.
2. Si $\exists \alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n$ ait une limite l finie, alors $\{u_n\}$ converge.
3. Si $\exists \alpha \leqslant 1$ et $m > 0$ tel que $n^\alpha u_n \geqslant m$ pour n assez grand, alors $\{u_n\}$ diverge.
4. Si $\exists \alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n$ admette une limite éventuellement infinie, alors $\{u_n\}$ diverge.
5. Si $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ avec $A > 0$, alors $\{u_n\}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Pas de réciproque à ces règles.

Séries de Bertrand : $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^b(n)}$ pour $n \geqslant 2$. $\{u_n\}$ converge ssi $(a, b) \succ (1, 1)$ (ordre lexicographique).

Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

3 Règles sur les séries générales

3.1 Règle des séries alternées

$\{u_n\}$ est *alternée* si ses termes sont réels et si $(-1)^n u_n$ a un signe constant pour n assez grand.

Soit (u_n) une suite réelle ; on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$:

1. $n \longmapsto |u_n|$ décroît
2. $n \longmapsto (-1)^n u_n$ est de signe constant

Alors :

1. $\{u_n\}$ converge
2. $\forall n \geqslant n_0, |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

3.2 Séries absolument convergentes

$\{u_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite *absolument convergente* si la série réelle positive $\{|u_n|\}$ converge. Dans ce cas $\{u_n\}$ converge et on a l'inégalité triangulaire : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$. Si $\{u_n\}$ est absolument convergente, elle satisfait le critère de Cauchy. Une série convergente mais non absolument convergente est dite *semi-convergente*.

3.3 Utilisation des développements limités

La forme générale d'un développement asymptotique est $u_n = u_n^{(1)} + u_n^{(2)} + \ldots + u_n^{(p)} + \mathrm{O}(u_n^{(p+1)})$. On peut conclure grâce à un développement limité en matière de séries lorsqu'on termine par $\mathrm{O}(u_n^{(p+1)})$ où $\{u_n^{(p+1)}\}$ est absolument convergente.

3.4 Transformation d'Abel

On transforme une somme finie $S_n = a_0 b_0 + \ldots + a_n b_n$ comme il suit : $\mathcal{B}_0 = b_0$, $\mathcal{B}_1 = b_0 + b_1, \ldots, \mathcal{B}_n = b_0 + \ldots + b_n$.On a alors $S_n = a_0\mathcal{B}_0 + a_1(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_0) + \ldots + a_n(\mathcal{B}_n - \mathcal{B}_{n-1})$. On réécrit cette somme $S_n = \mathcal{B}_0(a_0 - a_1) + \ldots + \mathcal{B}_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n\mathcal{B}_n$. Les sommes paritelles de la série $\{a_n b_n\}$ sont donc celles de la série $\{\mathcal{B}_n(a_n - a_{n-1})\}$ au terme correctif près $a_n\mathcal{B}_n$.

4 Opérations sur les séries numériques

4.1 Produit de Cauchy

Soit $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ et $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ deux séries ; on définit leur *produit de Cauchy* par : $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Si $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont absolument convergentes, $\{w_n\}$ est absolument convergente et $(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} w_n$.

4.2 Sommation par paquets

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, posons : $v_n = u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)+1} + \ldots + u_{\varphi(n+1)-1}$. Alors si $\{u_n\}$ converge, $\{v_n\}$ converge également et a même somme.

Réciproque : si

1. $\{v_n\}$ converge
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
3. $n \longmapsto \varphi(n+1) - \varphi(n)$ est majorée

alors $\{u_n\}$ converge.

4.3 Permutation des termes (hors programme)

Soit $\sigma : \mathbb{N} \overset{bijective}{\longrightarrow} \mathbb{N}$, $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ une série et $\{v_n = u_{\sigma(n)}\}_{n\geqslant 0}$.

1. Si $\{u_n\}$ est absolument convergents, alors $\{v_n\}$ est absolument convergente et a même somme
2. Si au contraire $\{u_n\}$ est semi-convergente, alors $\exists \sigma / \{v_n\}$ diverge
3. Si $\{u_n\}$ est semi-convergente, alors $\forall S \in \mathbb{R}$, $\exists \sigma / \{v_n\}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_n = S$

5 Séries doubles

5.1 Position du problème

On cherche à donner un sens à $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et surtout à changer l'ordre de sommation.

5.2 Cas des familles positives

Soit une suite double $u_{p,q} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. On dit que $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens si

1. $\forall p \in \mathbb{N}$, la série de terme général $q \longmapsto u_{p,q}$ converge
2. La série positive de terme général $p \longmapsto \sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ converge

Dans ces conditions, on désigne par $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$ la somme de ces séries.

Propriété : $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens ssi $\sum\limits_{q=0}^{+\infty}(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens. En outre, si elles sont définies, ces deux séries doubles on même somme.

5.3 Cas général

$(u_{p,q}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une série double. On dit que cette série (ou suite) est *sommable* si la suite positive $(|u_{p,q}|)$ satisfait $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}}\sum\limits_{q\in\mathbb{N}} |u_{p,q}|$ (ou $\sum\limits_{q\in\mathbb{N}}\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} |u_{p,q}|$) a un sens. Dans ces conditions, $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens, $\sum\limits_{q=0}^{+\infty}(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q})$ a un sens et ces deux séries ont même somme.

Séries entières

$\alpha 7 - MP^*$

1 Généralités

On appelle *série entière* toute série dont le terme général est de la forme $a_n x^n$ où $x \in \mathbb{C}$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Le *domaine de convergence* d'une telle série est $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{C} / \{a_n x^n\} \text{ converge}\}$. La *fonction-somme* de la série est $S : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$.

1.1 Structure du domaine de convergence

On note $\mathrm{D}(a,b)$ la *boule ouverte* de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $b \in \mathbb{R}^+$: $\mathrm{D}(a,b) = \{z \in \mathbb{C} / |z-a| < b\}$, et $\mathrm{D}'(a,b) = \{z \in \mathbb{C} / |z-a| \leqslant b\}$.

Lemme d'Abel : soit $\{a_n x^n\}$ une série entière, $x \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que pour $r > 0$, $a_n r^n$ est bornée. Alors $\forall z \in \mathrm{D}(0,r)$, la série $\{a_n z^n\}$ est convergente (même absolument convergente). En particulier, $\mathrm{D}(0,r) \subset \mathcal{D}$.

Corollaire : $\{a_n z^n\}$ une série entière, alors :

1. Soit $\exists R > 0 / \mathrm{D}(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \mathrm{D}'(0,R)$; R est alors unique, on l'appelle *rayon de convergence* de la série entière.
2. Soit $\mathcal{D} = \mathbb{K}$ et par extension on dit que $R = +\infty$
3. Soit $\mathcal{D} = \{0\}$ et dans ce cas $R = 0$.

1.2 Utilisation de la règle de d'Alembert

Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \lambda \in [0, +\infty[$ quand $n \longrightarrow +\infty$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$.

1.3 Combinaisons linéaires de séries entières

Soit $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence R, $\{b_n x^n\}$ de rayon de convergence R'. Soit $\{c_n x^n\}$ de rayon de convergence R'', où $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$. On a toujours $R'' \geqslant \min(R, R')$. Si de plus $R \neq R'$ et $\alpha\beta \neq 0$, alors $R'' = \min(R, R')$.

1.4 Produit de Cauchy de deux séries entières

Soit $\{a_n x^n\}$ et $\{b_n x^n\}$ deux séries entières. Leur produit de Cauchy $\{c_n x^n\}$ reste une série entière. De plus, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $R'' \geqslant \min(R, R')$.

2 Propriétés de la fonction-somme

On appelle $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ la fonction-somme dela série entière $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence R.

2.1 Continuité de la série lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si $R \in]0, +\infty]$, alors F est continue sur le disque ouvert $\mathrm{D}(0,R)$.

2.2 Classe infinie dans le cas réel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence $R > 0$; alors F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$; plus précisément, on obtient les $F^{(k)}$ en dérivant formellement les expressions $\sum a_n x^n$.

2.3 Primitivation dans le cas réel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence $R > 0$. La fonction $x \in]-R, R[\longmapsto \int_0^x F(t)\mathrm{d}t$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. On l'obtient par primitivation formelle de $\sum a_n x^n$.

2.4 Identification de séries entières

Soit deux séries $\{a_n x^n\}$ et $\{b_n x^n\}$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b tous deux non nuls. S'il existe $h > 0$ tel que

1. $]-h, h[\subset]-R_a, R_a[\bigcap]-R_b, R_b[$
2. $\forall x \in]-h, h[, \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

3 Développement en série entière

3.1 Définitions

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une fonction f est dite *développable en série entière* sur l'intervalle $]-a, a[$ $(a > 0)$ si il existe une série entière $\{a_n x^n\}$ de rayon de convergence $R \geqslant a$ telle que $\forall x \in]-a, a[, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit de même f développable en série entière.

3.2 Condition nécéssaire d'existence d'un développement en série entière

Soit une fonction f définie au voisinage de 0 à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour que f soit développable en série entière, il faut qu'elle soit $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

3.3 Développement en série entière de fonctions rationnelles

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toute fonction de la forme $x \overset{f}{\longmapsto} \frac{P(x)}{Q(x)}$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $Q(0) \neq 0$, est développable en série entière. Plus précisément, si (ξ_k) est la liste des zéros de Q dans $\mathbb{C}$, f est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0,a)$ où $a = \min |\xi_k| > 0$. Voir fiche sur les développements en série entière classiques.

3.4 Utilisation d'une équation différentielle

1. Soit une équation différentielle linéaire de la forme $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ où $a, b, c : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, I intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. Si a ne s'annulle pas sur I, soit φ_1 et φ_2 deux solutions de cette équation différentielle. Si $\exists x_0 \in I / \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$.
2. Soit une équation différentielle linéaire de la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + d(x) = 0$ où $a, b, c, d : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ et a ne s'annulle pas sur I. Soit φ_1 et φ_2 deux solutions de cette équation différentielle définies sur I ; si $\exists x_0 \in I / \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2(x_0) \\ \varphi_2'(x_0) \end{pmatrix}$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

On obtient ainsi des conditions sur les solutions de l'équation différentielle et parfois des séries entières solution.

Développements en série entière classiques

$\alpha 7bis - MP^*$

1 Fonctions exponentielles et trigonométriques

$$\forall x \in \mathbb{C}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{C}, \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{C}, \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \mathrm{argth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

2 Fonctions rationnelles, puissance et logarithme

$$\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[, -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[, \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[, \forall \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Généralisation de la notion d'intégrale

$\alpha 8 - MP^*$

1 Intégrabilité des fonctions positives

1.1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$. f est *intégrable* sur I si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout segment $J \subset I$, $\int_J f \leqslant M$. Si f est intégrable, on définit $\int_I f = \sup(\int_J f)$. Si I est un segment, toute fonction $\mathcal{C}^0_m : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est intégrable.

1.2 Intégrabilité et limite

Si I est un intervalle, on appelle suite croissante exhaustive de segments (SCES) de I toute suite de segments emboîtés $J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_n \subset \ldots$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$. Avec les notations précédentes, la suite $n \longmapsto \int_{J_n} f$ croît. f est alors intégrable ssi cette suite est majorée, auquel cas $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$.

Utilisation de la formule de Chasles : $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$, $I = (a, b)$ (on ne précise pas l'ouverture aux bornes de I) ; soit $c \in]a, b[$, f est intégrable sur I ssi $f|_{(a,c]}$ et $f|_{[c,b)}$ le sont sur $(a, c]$ et $[c, b)$ respectivement. Dans ce cas $\int_I f = \int_{(a,c]} f + \int_{[c,b)} f$.

Corollaire : si I et I' sont deux intervalles de mêmes bornes $I' \subset I$ et $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$, alors f est intégrable sur I ssi f est intégrable sur I'. Dans ce cas $\int_I f = \int_{I'} f$.

1.3 Opérations et estimations

- $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$; soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. f est intégrable ssi λf l'est, auquel cas $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.
- $f, g : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$; $f + g$ est intégrable ssi f et g le sont, auquel cas $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$.
- $f, g : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$; si $\exists M \geqslant 0/f \leqslant Mg$ et g intégrable alors f est intégrable et $\int_I f \leqslant M \int_I g$.

2 Fonctions complexes intégrables

2.1 Définitions et modes de calcul

$f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$ est *intégrable* sur I si $|f|$ l'est. En particulier si $|f| \leqslant \varphi$ où $\varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$ intégrable, alors f est intégrable.

- Soit $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}$ intégrable, alors f^+ et f^- sont $\mathcal{C}^0_m$ intégrables
- Soit $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$ intégrable, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont $\mathcal{C}^0_m$ intégrables

2.2 Linéarité

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $l^1(I, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions intégrables $I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{K}$. C'est un sev de $\mathcal{C}^0_m(I, \mathbb{K})$, et $\int_I$ est une forme linéaire sur ce sev. $l^2(I, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions de carré intégrable.

1. Si $f, g \in l^2(I, \mathbb{K})$ alors $fg \in l^1(I, \mathbb{K})$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(f, g) \in (l^2(I, \mathbb{K}))^2 \longmapsto \int_I fg$ est un produit scalaire : $l^2(I, \mathbb{K})$ est préhilbertien.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(f, g) \in (l^2(I, \mathbb{K}))^2 \longmapsto \int_I \overline{f}g$ est un produit scalaire hermitien.
4. Si $(f, g) \in (l^2(I, \mathbb{K}))^2$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\int_I fg| \leqslant \sqrt{\int_I |f|^2 \int_I |g|^2}$.

2.3 Règles de calcul sur les intégrales

- *Règle du changement de variable* : soit I, I' deux intervalles, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$ intégrable, $\varphi : I' \longrightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ est intégrable sur I' et $\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot \varphi'$.
- *Règle d'intégration par parties* : Soit I un intervalle, $I = (a, b)$, $f, g : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1_m} \mathbb{C}$. Si fg' et $f'g$ sont intégrables, alors $\int_I f'g = [fg]_a^b - \int_I fg'$, où $[fg]_a^b = \lim_{x \overset{<}{\to} b} (fg)(x) - \lim_{x \overset{>}{\to} a} (fg)(x)$.

3 Théorèmes de convergence

3.1 Définitions

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble, on appelle *suite de fonctions* de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{K}$ une famille d'applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$; on la note $f_n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$. Avec ces notations, on dit que (f_n) *converge simplement vers* f si $\forall x \in \mathcal{A}$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Si $(u_n) \in (\mathbb{K}^{\mathcal{A}})^{\mathbb{N}}$, on dit que $\{u_n\}$ *converge simplement* sur $\mathcal{A}$ si $\forall x \in \mathcal{A}$, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. On peut alors définir une fonction-somme $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \end{array}$.

3.2 Théorème de convergence dominée (théorème de Lebesgue)

I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^0_m$ $I \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose :

1. (f_n) converge simplement vers une fonction f $\mathcal{C}^0_m$.
2. domination : $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$.

Alors :

1. Les fonctions f_n et f sont intégrables
2. $\int_I f_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to+\infty} \int_I f(x)\mathrm{d}x$.

3.3 Théorème d'intégration terme à terme

Si $u : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$, intégrable, on définit la *norme-un* de u et on note $\|u\|_1$ la quantité : $\|u\|_1 = \int_I |u(t)|\mathrm{d}t$.

Théorème : Soit (u_n) une série de fonctions $I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$ intégrable. Hypothèses :

1. Cette série converge simplement sur I et la fonction-somme u est $\mathcal{C}^0_m$.
2. La série numérique $\{\|u_n\|_1\}$ est convergente.

Alors :

1. u est intégrable sur I
2. $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$., soit : $\int_I u = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$.
3. $\|u\|_1 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_1$.

4 Intégrales à paramètres

4.1 Théorème de continuité

Énoncé 1 : Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. Hypothèses :

1. Pour tout $x \in J$ fixé, $t \in I \longmapsto f(t, x)$ est $\mathcal{C}^0_m$ et intégrable
2. Pour tout $t \in I$ fixé, $x \in J \longmapsto f(t, x)$ est $\mathcal{C}^0$

3. $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall (t,x) \in I \times J$, $|f(t,x)| \leqslant \varphi(t)$

Alors la fonction $F : x \in J \longmapsto \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$ est bien définie et continue.

Énoncé 2 : A une partie d'un espace métrique, $f : I \times A \longrightarrow \mathbb{C}$. Si :

1. $\forall x \in A$, $t \in I \longmapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^0_m$ et intégrable
2. $\forall t \in I$, $x \in A \longmapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^0$ sur A
3. $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall (t,x) \in I \times A$, $|f(t,x)| \leqslant \varphi(t)$

Alors la fonction $F : x \in A \longmapsto \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur A.

On peut se limiter à établir la domination sur tous les $I \times K$ où K est un compact inclus dans A.

4.2 Théorème de dérivabilité (théorème de Leibniz)

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. Hypothèses :

1. $\forall x \in J$, $f(\bullet, x)$ est $\mathcal{C}^0_m$ et intégrable
2. il existe une application $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ définie en tout point de $I \times J$
3. $\forall x \in J$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet, x)$ est $\mathcal{C}^0_m$ et intégrable
4. $\forall t \in I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, \bullet)$ est $\mathcal{C}^0$ sur J
5. Domination : $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall (t,x) \in I \times J$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leqslant \varphi(t)$

Dans ces conditions, $F : x \in J \longmapsto \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur J et $\forall x \in J$, $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t$.

4.3 Étude de la fonction Γ

On définit : $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$. Γ est bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln^k(t)\mathrm{d}t$.
On a de plus :

- $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(1) = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
- En 0, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$.

Variations :

x	0	1	c	2	$+\infty$
$\Gamma'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Gamma(x)$	$+\infty$	$\searrow$	> 0	$\nearrow$	$+\infty$

Suites et séries de fonctions

$\alpha 9 - MP^*$

1 Suites de fonctions

1.1 Convergence simple

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions de E dans $\mathbb{C}$: on dit que (f_n) *converge simplement* vers $f \in \mathbb{C}^E$ si $\forall x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, c'est à dire $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. n_0 dépend de ε et de x. (f_n) converge simplement ssi $(f_n(x))$ vérifie le critère de Cauchy pour tout x : $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0/\forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant 1, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

1.2 Convergence uniforme

$(f_n) \in (\mathbb{C}^E)^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathbb{C}^E$, (f_n) *converge uniformément* vers f si $\sup\limits_{x\in E}|f(x) - f_n(x)| \longrightarrow 0$. Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée, on appelle norme-infini et on note $\|\varphi\|_\infty$ la quantité $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{x\in E}|\varphi(x)|$.

- Si (f_n) converge uniformément vers f et g alors $f = g$
- Si (f_n) converge uniformément vers f alors (f_n) converge simplement vers f

(f_n) converge uniformément vers f ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall x \in E, \forall n \geqslant n_0, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

(f_n) converge uniformément ssi f vérifie le *critère de Cauchy de convergence uniforme* : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0/\forall x \in E$, $\forall n \geqslant n_0$, $\forall p \geqslant 0$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

(f_n) converge uniformément vers f ssi $\exists (a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}/\ \forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

1.3 Convergence uniforme et continuité

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que (f_n) converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$
   (a) Si toutes les f_n sont $\mathcal{C}^0$ (respectivement à gauche, à droite) en un point $x_0 \in A$, il en est de même pour f en ce point.
   (b) Si toutes les f_n sont $\mathcal{C}^0$ sur A alors il en est de même pour f.
2. $A \subset E$ où E est un espace métrique, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que (f_n) converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Si toutes les f_n sont continues en $x_0 \in A$, alors f l'est aussi. Si toutes les f_n sont continues sur A alors f l'est aussi.
3. $I = (a, b[\subset \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Hypothèses : $f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que (f_n) converge uniformément vers f ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists l_n = \lim\limits_{x \stackrel{<}{\to} b} f_n(x)$ finie. Alors :
   (a) l_n admet une limite l finie
   (b) $l = \lim\limits_{x \stackrel{<}{\to} b} f(x)$
4. Version topologique : $A \subset E$ où E est un espace métrique, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que (f_n) converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit $a \in \overline{A}\backslash A$, on suppose que $\forall n$, $\exists l_n = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f_n(x)$. Alors (l_n) admet une limite l et $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$.
5. I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I, alors f est encore continue sur I.

1.4 Convergence uniforme et intégration

1. Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$. Si (f_n) converge uniformément vers f, alors
   (a) $\int_I |f - f_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   (b) $\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f$
2. Si I est un intervalle borné non fermé de $\mathbb{R}$, ces résultats restent vrais à condition que les f_n et f soient intégrables
3. Théorème de primitivation : I intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in I$ fixé. Si (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors :
   (a) $F_n : x \in I \longmapsto \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$ converge simplement vers $F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
   (b) (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment inclus dans I.

1.5 Théorème de dérivation

I intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{C}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Hypothèses :

1. (f_n) converge simplement vers f
2. (f'_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction g

Alors :

1. g est $\mathcal{C}^0$
2. f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$
3. (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I.

Classe $\mathcal{C}^k$: I intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} \mathbb{C}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Hypothèses :

1. (f_n), (f'_n), ..., $(f_n^{(k-1)})$ convergent simplement sur I et la limite simple de (f_n) est f.
2. $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction g.

Alors f est $\mathcal{C}^k$, $f^{(k)} = g$ et $(f_n^{(l)})$ converge uniformément vers $f^{(l)}$ sur tout segment inclus dans I pour tout $0 \leqslant l \leqslant k$.

2 Séries de fonctions

2.1 Nature de la convergence

Soit E un ensemble, $A \subset E$, $\{u_n\}$ une série de fonctions $A \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit qu'elle *converge simplement* sur A si pour tout $x \in A$, $\{u_n(x)\}$ est convergente. Dans ce cas, la fonction-somme $S : x \in A \longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est bien définie. Dans ce cas, la suite de fonctions $S_n : x \in A \longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$ converge simplement vers S et la suite de fonctions $R_n : x \in A \longrightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ converge simplement vers $\underline{0}$.

Critère de Cauchy de convergence simple : $\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0/\forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant 1, |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon$.

On dit que $\{u_n\}$ *converge uniformément* sur A si (S_n) converge uniformément vers S. Cela revient à dire que (R_n) converge uniformément vers $\underline{0}$.

Critère de Cauchy de convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0/\forall x \in A, \forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant 1, |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon$.

On dit que $\{u_n\}$ *converge normalement* sur A lorsque la série numérique $\{\|u_n\|_\infty\}$ converge. Avec ces notations,

1. Si $\{u_n\}$ converge normalement sur A, $\forall x \in A$, $\{u_n(x)\}$ est absolument convergente
2. Si $\{u_n\}$ converge normalement sur A, alors $\{u_n\}$ converge uniformément sur A

Caractérisation de la convergence normale : $\{u_n\}$ converge normalement ssi il existe une série numérique $\{\alpha_n\}$ convergente telle que $\forall x \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \leqslant \alpha_n$.

2.2 Continuité de la fonction-somme

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, $u_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\{u_n\}$ converge uniformément sur A, S sa fonction-somme
   (a) Si toutes les u_n sont $\mathcal{C}^0$ (respectivement à gauche, à droite) en un point $x_0 \in A$, il en est de même pour S en ce point.
   (b) Si toutes le u_n sont $\mathcal{C}^0$ sur A alors il en est de même pour S.
2. $A \subset E$ où E est un espace métrique, $u_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\{u_n\}$ converge uniformément. Si toutes les u_n sont continues en $x_0 \in A$, alors S l'est aussi. Si toutes les u_n sont continues sur A alors S l'est aussi.
3. $I = (a, b[\subset \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Hypothèses : $u_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $\{u_n\}$ converge uniformément, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists l_n = \lim\limits_{x \stackrel{<}{\to} b} u_n(x)$ finie. Alors :

(a) $\exists l = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} S(x)$

(b) $\{l_n\}$ converge, et $l = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} l_n$.

2.3 Intégration des sommes de séries

$I = [a,b]$, $\{u_n\}$ série de fonctions $I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$. Hypothèses : $\{u_n\}$ converge uniformément sur I et $S : x \in I \overset{\mathcal{C}^0_m}{\longmapsto} \sum u_n(x)$. Alors :

1. La série numérique de terme général $v_n = \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t$ converge
2. $\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$, c'est à dire $\int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t$.

Ces résultats restent valables si I est un intervalle borné non fermé de $\mathbb{R}$, a condition que les u_n et u soient intégrables sur I.

2.4 Primitivation

I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, telle que $\{u_n\}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I. Soit S la fonction-somme associée à $\{u_n\}$. Alors :

1. S est $\mathcal{C}^0$
2. Si $a \in I$, $\int_a^x S(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$
3. Il y a convergence uniforme sur tout segment de la série $\{\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t\}$

2.5 Dérivation

I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{C}$ une série de fonctions. Si $\{u_n\}$ converge simplement sur I et $\{u'_n\}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors S est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in I$, $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$. En outre, $\{u_n\}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Avec les mêmes notations, si les u_n sont $\mathcal{C}^{k \geqslant 1}$ sur I, si $\{u_n\}$, $\{u'_n\}$, ..., $\{u_n^{(k-1)}\}$ convergent simplement sur I et $\{u_n^{(k)}\}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors S est $\mathcal{C}^k$ et $\forall 0 \leqslant \underline{l} \leqslant k$, $S^{(l)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^{(l)}$. En outre, il y a convergence uniforme sur tout segment des séries $\{u_n^{(l)}\}$.

3 Étude des séries entières

$\{a_n x^n\}$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. On s'intéresse à la nature de la convergence.

1. Dans le cas réel, il y a convergence uniforme de la série $\{a_n x^n\}$ sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.
2. Dans le cas complexe, il y a convergence uniforme sur tout disque fermé $\mathrm{D}'(0,r)$ où $r < R$.

Dans les deux cas, il y a même convergence normale sur les ensembles condidérés.

4 Théorèmes de densité

4.1 Généralités

Normes : voir α13 espaces métriques

Comparaison entre normes : I un segment de $\mathbb{R}$, E l'ensemble des fonctions $I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, E_m l'ensemble des fonctions $I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$. On définit pour tout $f \in E_m$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2} \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$$

On a de plus : $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2$

Soit $\| \bullet \|$ une norme, F sev de E_m, $\mathcal{P}$ une partie de F. On dit que $\mathcal{P}$ est *dense* dans F au sens de $\| \, \|$ si $\forall f \in F$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in \mathcal{P} / \|f - g\| \leqslant \varepsilon$ (c'est à dire $F \subset \overline{\mathcal{P}}$).

4.2 Fonctions en escalier

$\mathcal{E}_I$ l'ensemble des fonctions en escalier $I \longrightarrow \mathbb{C}$. $\mathcal{E}_I$ est dense dans E_m au sens de $\| \, \|_\infty$ (a fortiori de $\| \, \|_1$ et $\| \, \|_2$)

Lemme de Lebesgue (hors programme) : $f : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$, pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{I} = \int_a^b f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t$; alors $\mathcal{I} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

4.3 Densité des fonctions affines par morceau

$I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est ***affine par morceaux*** si elle est $\mathcal{C}^0$ et s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de I telle que $\varphi|_{[x_i, x_{i+1}]}$ soit affine pour tout i.

Le sous-espace vectoriel des applications $I \longrightarrow \mathbb{C}$ affines par morceaux est dense dans le sev $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ au sens de $\| \, \|_\infty$.

4.4 Théorème polynomial de Weierstrass

I un segment de $\mathbb{R}$, le sev des fonctions polynômiales de I dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ au sens de $\| \, \|_\infty$.

4.5 Densité des fonctions polynômiales trigonométriques

(théorème de Weierstrass trigonométrique)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est un ***polynôme trigonométrique*** si elle est de la forme $f(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} C_k e^{ikx}$.

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ $2\pi-$périodiques. Le sev des fonctions polynômiales trigonométriques est dense dans E.

Séries trigonométriques

$\alpha 10 - MP^*$

1 Généralités sur les fonctions périodiques

1.1 Questions liées à la classe $\mathcal{C}^k$

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ $T-$périodique ($T>0$). f est $\mathcal{C}^k_m$ ssi $f|_{[a,a+T]}$ est $\mathcal{C}^k_m$ ($a\in\mathbb{R}$).

1.2 Dérivées et primitives des fonctions périodiques

$f:\mathbb{R}\xrightarrow{\mathcal{C}^k_m}\mathbb{C}$ est dite *régulière* (au sens de Dirichlet) ou *satisfait la convention de Dirichlet* si pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{2}(\lim_{y\overset{<}{\to}x} f(y)+\lim_{y\overset{>}{\to}x} f(y)).$$

Si f est $\mathcal{C}^1_m$, f' n'est pas définie en les points où elle est discontinue.

1.3 Séries trigonométriques

Soit $T>0$, on appelle *série trigonométrique* toute série de fonctions $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ de la forme $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$, où :

- u_0 est une constante $u_0=\frac{a_0}{2}$
- Pour $n\geqslant 1$, u_n est de la forme $x\longmapsto a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nx)+b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx)$ où $a_n,b_n\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si cette série converge simplement sur $\mathbb{R}$, sa fonction-somme S est de période T. Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont absolument convergentes, alors $\{u_n\}$ converge normalement et S est de plus $\mathcal{C}^0$.

De la même façon, on peut considérer une série de fonctions de la forme $\forall n\in\mathbb{Z}$, $u_n(x)=C_ne^{inx}$. On appelle somme à l'ordre N de cette série la suite $S_N=\sum\limits_{k=-N}^{N}C_ke^{ikx}$. Si cette somme admet une limite, on dit que la série $\{C_ne^{inx}\}$ converge et on note $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{inx}$ sa somme.

On peut passer de l'une à l'autre de ces représentations an posant : $a_n=C_n+C_{-n}$ et $b_n=i(C_n-C_{-n})$. $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable ssi $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{C_n\}_{n\in(-\mathbb{N}^*)}$ sont absolument convergentes.

Séries de Fourier : si $f:\mathbb{R}\xrightarrow[T-\text{pér.}]{\mathcal{C}^0}\mathbb{C}$, on définit $C_n(f)=\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T}f(t)e^{-\frac{2\pi}{T}nit}\mathrm{d}t$, $a_n(f)=\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T}f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)\mathrm{d}t$ ($n\geqslant 0$) et $b_n(f)=\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T}f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)\mathrm{d}t$ ($n\geqslant 1$) (ces valeurs ne dépendent pas du choix de α). La *série de Fourier* de f est alors par exemple $\{C_ne^{\frac{2\pi}{T}nix}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, ou $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_0=\frac{a_0}{2}$ et $\forall n\geqslant 1$, $u_n=a_n(f)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)+b_n(f)\sin(\frac{2\pi}{T}nx)$.

2 Convergence des séries de Fourier

2.1 Théorème de Dirichlet

$f:\mathbb{R}\xrightarrow{\mathcal{C}^1_m}\mathbb{C}$ $T-$périodique, on peut lui associer ses coefficients de Fourier a_n, b_n et C_n qui en découlent. Avec ces hypothèses,

1. La série de Fourier de f converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la somme de cette série est $\frac{1}{2}(\lim\limits_{y\overset{<}{\to}x} f(y)+\lim\limits_{y\overset{>}{\to}x} f(y))$. En particulier cette somme est f en tout point où f est continue.

2.2 Cas de la convergence normale

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ $T-$périodique où f est $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1_m$. La série de Fourier de f est alors normalement convergente. Plus précisément, les séries $\{|C_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{|C_{-n}|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{|b_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

2.3 Dérivation des séries de Fourier

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ $T-$périodique où f est $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1_m$, et f' $\mathcal{C}^0_m$. Alors :

- $\forall n\in\mathbb{Z}$, $C_n(f')=\frac{2\pi}{T}niC_n(f)$
- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left\{\begin{array}{c} a_n(f')=\frac{2\pi}{T}nb_n(f)\\ b_n(f')=-\frac{2\pi}{T}na_n(f)\end{array}\right.$.

2.4 Primitivation

$f:\mathbb{R}\xrightarrow{\mathcal{C}^0_m}\mathbb{C}$ $T-$périodique, on suppose que $\int_a^{a+T}f(t)\mathrm{d}t=0$. (Cela ssi $a_0(f)=0$ et $C_0(f)=0$).

Soit $a\in\mathbb{R}$ fixé, $F:x\in\mathbb{R}\longmapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est alors $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1_m$ et $T-$périodique vu l'hypothèse. Alors :

- $\forall n\in\mathbb{Z}^*$, $C_n(F)=\frac{T}{2\pi}\frac{C_n(f)}{ni}$
- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n(F)=-\frac{T}{2\pi}\frac{b_n(f)}{n}$ et $b_n(f)=\frac{T}{2\pi}\frac{a_n(f)}{n}$

2.5 Identification

Une série trigonométrique qui converge uniformément est égale à sa série de Fourier. Autrement dit, si $\{\gamma_ne^{nix}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cvu vers f, alors $\gamma_n=C_n(f)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

3 Résultats quadratiques

3.1 Généralités

$T>0$ fixé, E_m désigne le $\mathbb{C}-$ev des fonctions $\mathbb{R}\xrightarrow{\mathcal{C}^0_m}\mathbb{C}$ $2\pi-$périodiques ; E_0 est le sev de E_m formé des applications régulières, E le sev de E_0 formé des applications continues, $\mathcal{P}$ le sev de E formé des polynômes trigonométriques. Sur $E_0\times E_0$, on définit le produit scalaire hermitien $(f\mid g)=\frac{1}{T}\int_0^T\overline{f}g$. Sur $E_m\times E_m$, ce n'est pas un vrai produit scalaire. Pour $f\in E_m$, $\|f\|_2=\sqrt{(f\mid f)}\in\mathbb{R}^+$.

3.2 Formule de Bessel-Parseval

$f\in E_m$, soit a_n, b_n, C_n ses coefficients de Fourier.

1. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable et $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2=\|f\|_2^2=\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2\mathrm{d}t$.
2. Les séries $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{|b_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et $\left|\frac{a_0}{2}\right|^2+\frac{1}{2}\sum(|a_n|^2+|b_n|^2)=\|f\|_2^2$

3.3 Convergence en moyenne quadratique

$f\in E_m$, elle admet des coefficients de Fourier a_n, b_n et C_n. $S_n:x\longmapsto\sum\limits_{k=-N}^{N}C_ke^{\frac{2\pi}{T}ikx}$. Alors $\|f-S_N\|_2\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Corollaire : $\mathcal{P}$ est dense dans E_m au sens de $\|\ \|_2$.

Formes bilinéaires et quadratiques

$\alpha 11 - MP^*$

1 Généralités

On se place dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

1.1 Formes bilinéaires

E un $\mathbb{K}-$ev de dimension quelconque. $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une *forme bilinéaire* si pour tout $x \in E$, $y \longmapsto f(x,y)$ est une forme linéaire et pour tout $y \in E$, $x \longmapsto f(x,y)$ est une forme linéaire. f est *symétrique* si $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x,y) = f(y,x)$.

Si E est de dimension finie, soit $\mathcal{B}$ une base de E ; si $(x,y) \in E^2$, on note $X = M_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$. Toute forme bilinéaire sur E est alors de la forme $(x,y) \overset{f}{\longmapsto} {}^tXMY$, $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ fixée. f est symétrique ssi M est symétrique ssi ${}^tM = M$.

1.2 Formes bilinéaires symétriques et dualité

Soit f une forme bilinéaire symétrique (fbs) de E, $x \in E$, on définit une application $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$ telle que $\forall x \in E$, $\varphi(x) : y \longmapsto f(x,y)$. φ est une application linéaire de E dans E^*.

Par définition, $\ker f \overset{def}{=} \ker\varphi = \{x \in E / \forall y \in E, f(x,y) = 0\}$. f est *non dégénérée* si $\ker f = \{0\}$. Si de plus E est de dimension finie, on définit $\mathrm{rg}(f) \overset{def}{=} \mathrm{rg}(\varphi)$.

1.3 Structure et matrices

L'ensemble des fbs de E est un sev de $\mathbb{K}^{E\times E}$. Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on définit pour $f \in FBS(E)$ la matrice $M_{\mathcal{B}}(f) = (f(e_i,e_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. $M_{\mathcal{B}} : f \in FBS(E) \longmapsto M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est linéaire, $\ker M_{\mathcal{B}} = \{0\}$, $\mathrm{Im}(M_{\mathcal{B}}) = Sym_n(\mathbb{K})$. De plus, $(M_{\mathcal{B}}(f) = 0) \Longrightarrow (f = \underline{0})$.

Corollaire : $\dim FBS(E) = \frac{n(n+1)}{2}$

Propriété : $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi)$ donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(f))$. De plus, f est non dégénérée ssi $M_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

1.4 Orthogonalité relative à une forme bilinéaire symétrique

E un $\mathbb{K}-$ev de dimension quelconque, f une fbs ; pour tout $(x,y) \in E^2$, on dit que $x \perp y$ si $f(x,y) = 0$. Si F est un sev de E, on pose $F^\perp = \{y \in E / \forall x \in F, f(x,y) = 0\}$; c'est un sev de E. On a toujours $F \subset F^{\perp\perp}$, $E^\perp = \ker f$. En revanche, $F \bigcap F^\perp \neq \{0\}$ en général.

Propriété (hors programme) : Si E est de dimension finie, f FBS de E, alors il existe une base orthogonale pour f.

Lemme : Soit $f \in FBS(E)$, E de dimension quelconque ; si $\forall x \in E$, $f(x,x) = 0$, alors $f = \underline{0}$.

1.5 Changement de base, matrices congruentes

E un ev de dimension n. Soit f une fbs, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. $M = M_{\mathcal{B}}(f)$, $M' = M_{\mathcal{C}}(f)$, $P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Alors $M' = {}^tPMP$.

$(M, M') \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$ sont *congruentes* si elles sont symétriques et $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / M' = {}^t PMP$. C'est une relation d'équivalence sur $Sym_n(\mathbb{K})$. Si M et M' sont congruentes, alors elles sont équivalentes et ont même rang.

1.6 Formes quadratiques

E un $\mathbb{K}-$ev de dimension quelconque. $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une *forme quadratique* si il existe une fbs f telle que $\forall x \in E$, $q(x) = f(x,x)$.

Caractérisation : $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique ssi :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. $f : (x,y) \in E^2 \longmapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est une fbs

dans ce cas f est l'unique fbs telle que $q(x) = f(x,x)$. On l'appelle *forme polaire* de q.

On définit $\ker q \overset{def}{=} \ker f$; en général, $\ker q \neq q^{-1}(\{0\})$. On dit que q est *non dégénérée* si f l'est. Si de plus E est de dimension finie, on pose $\mathrm{rg}(q) \overset{def}{=} \mathrm{rg}(f)$, et si $\mathcal{B}$ est une base de E, $M_{\mathcal{B}}(q) \overset{def}{=} M_{\mathcal{B}}(f)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, q est *positive* si $\forall x \in E$, $q(x) \geqslant 0$, et q est *définie positive* si $\forall x \in E\backslash\{0\}$, $q(x) > 0$. On parle de même de f fbs positive, définie positive.

2 Formes quadratiques positives, définies positives

2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un $\mathbb{R}-$ev, f une fbs positive, q la forme quadratique associée. On a : $\forall x,y \in E$, $|f(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)q(y)}$

Corollaire : si q est positive, $\ker \underline{q = q}^{-1}(\{0\})$ (hors programme).

Conséquence : on pose $\|x\| = \sqrt{q(x)}$. $\| \, \|$ est une *semi-norme* car :

- $\forall x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$
- $\|0\| = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\forall x,y \in E$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

2.2 Espaces préhilbertiens

Un ev réel E muni d'une fbs définie positive est dit *préhilbertien* (réel). La fbs est alors appelée *produit scalaire*, souvent noté $(x \mid y)$ ou $< x \mid y >$. $x \longmapsto \|x\|$ est réellement une *norme*, car on a de plus $(\|x\| = 0) \Longrightarrow (x = 0)$. On a les cas d'égalité suivants dans les inégalités précédentes :

- *Cauchy-Schwarz* : égalité ssi (x,y) liée
- *Inégalité triangulaire* : égalité ssi (x,y) positivement liée, c'est à dire $x = 0$ ou $\exists \lambda \geqslant 0 / x = \lambda y$

2.3 Espaces euclidiens

Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie. On a alors le procédé de Gram-Schmidt, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale, et si F est un sev, $E = F \oplus F^\perp$. On peut encore définir le *produit mixte* : si E est orienté, soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormale directe. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, $M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et donc $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \pm 1$. On dit alors que $\mathcal{B}$ est directe si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = +1$. Dans ce cas, $\det_{\mathcal{B}_0} = \det_{\mathcal{B}}$ est appelé *produit mixte*.

3 Adjoints d'un endomorphisme

$\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2.

3.1 Généralités

E un $\mathbb{K}-$ev de dimension quelconque, f une fbs, q la fq associée. $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont *adjoints* si $\forall x,y \in E$, $f(u(x),y) = f(x,v(y))$. Dans ce cas v et u sont adjoints. u est *autoadjoint* (ou *symétrique*) si u est son propre adjoint. u est *antiautoadjoint* (ou *antisymétrique*) si $-u$ est adjoint de u. Si $u \in GL(E)$, u est *orthogonal* si u^{-1} est adjoint de u.

On peut caractériser les endomorphismes orthogonaux : u est orthogonal ssi $u \in GL(E)$ et $\forall x,y \in E$, $f(u(x),u(y)) = f(x,y)$ ssi $u \in GL(E)$ et $\forall x \in E$, $q(u(x)) = q(x)$.

Exercice : l'adjoint, s'il existe, est unique lorsque la fbs de référence est non dégénérée.

3.2 Cas d'un espace euclidien

Si E est euclidien, tout $f \in \mathcal{L}(E)$ admet un unique adjoint, noté f^* ; de plus, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, $M_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tM_{\mathcal{B}}(f)$.

3.3 Propriétés de l'adjonction

E ev euclidien. $f \in \mathcal{L}(E) \longmapsto f^*$ est linéaire involutive ; c'est en particulier un automorphisme. On a les propriétés suivantes $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$; $\forall f \in GL(E)$, $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$; $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\det f = \det f^*$, $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(f^*)$, $\chi_f = \chi_{f^*}$, $\ker f^* = (\operatorname{Im}(f))^\perp$, $\operatorname{Im}(f^*) = (\ker f)^\perp$, $\operatorname{rg}(f^*) = \operatorname{rg}(f)$.

Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$, p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors p^* est le projecteur sur G parallèlement à F. Si de plus $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$, alors p est autoadjoint : un projecteur orthogonal est autoadjoint.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, si F est un sev stable par F, alors $F^\perp$ est stable par f^*.

4 Théorèmes de réduction et applications

4.1 Réduction des endomorphismes symétriques

Si E est un ev euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, alors :

1. u est scindé
2. si $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$, alors $\ker(u - \lambda Id) \perp \ker(u - \mu Id)$
3. u est diagonalisable ; plus précisément, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que $M_\mathcal{B}(u)$ soit diagonale

4.2 Endomorphismes symétriques positif

E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. $(x, y) \longmapsto (u(x) \mid y)$ est une forme bilinéaire. C'est une fbs ssi $u^* = u$. Dans ce cas, on dit que u est ***positif*** si $\forall x \in E$, $(u(x) \mid x) \geqslant 0$. On dit que u est ***défini positif*** si $\forall x \neq 0$, $(u(x) \mid x) > 0$.

Propriétés : Soit u tel que $u^* = u$.

1. u est positif ssi $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$
2. u est défini positif ssi $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$

Lemme : Soit $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ la liste des valeurs propres de u. Alors $\forall x \in E$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant (u(x) \mid x) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$. De plus, cet encadrement est optimal car les valeurs extrèmes sont atteintes.

On note souvent $\mathcal{S}^+ = \{u \in \mathcal{L}(E)\,\text{symétrique positif}\}$, $\mathcal{S}^{++} = \{u \in \mathcal{L}(E)\,\text{symétrique défini positif}\}$.

$\mathcal{S}^+$ a une structure de *cône* : $0 \in \mathcal{S}^+$, $\mathcal{S}^+$ est stable par $+$, et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathcal{S}^+$, $\lambda u \in \mathcal{S}^+$.

$\mathcal{S}^{++}$ a une structure de *cône pointé* : $\mathcal{S}^{++}$ est stable par $+$, et si $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $u \in \mathcal{S}^{++}$, $\lambda u \in \mathcal{S}^{++}$.

Propriétés : Soit E euclidien.

- Si $v \in \mathcal{L}(E)$, alors $u = v^* v \in \mathcal{S}^+(E)$; si de plus $v \in GL(E)$, alors $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.
- inversement, si $u \in \mathcal{S}^+(E)$, alors $\exists v \in \mathcal{L}(E)/u = v^* v$. Si $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, alors $\exists v \in GL(E)/u = v^* v$.
- Plus précisément, $\forall u \in \mathcal{S}^+(E)$, $\exists v \in \mathcal{S}^+(E)/u = v^2$, et $\forall u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, $\exists v \in \mathcal{S}^{++}(E)/u = v^2$,

Exercice : dans cette dernière propriété, v est unique.

Décomposition us : $\forall u \in GL(E)$, $\exists s \in \mathcal{S}^+(E)$, $\exists v \in \mathcal{O}(E)$ tels que $u = vs$.

Cas des matrices : On dit que $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique ***positive*** si ${}^tM = M$ et $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXMX \geqslant 0$. M est ***définie positive*** si de plus $\forall X \neq 0$, ${}^tXMX > 0$. On note de même $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus, $M \in \mathcal{S}^+$ ssi $\exists T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $M =^t TT$; $M \in \mathcal{S}^{++}$ ssi $\exists T \in GL_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $M =^t TT$.

4.3 Réduction des formes quadratiques

E un ev euclidien, $\forall l \in E^*$, $\exists! a \in E/\forall x \in E$, $l(x) = (a \mid x)$. Si $a \neq 0$, a est un vecteur normal à $\ker l$.

Soit f une fbs, $\exists! u \in \mathcal{L}(E)/u^* = u$ tel que $\forall x, y \in E$, $f(x, y) = (u(x) \mid y)$.

Corollaire : il existe un base $\mathcal{B}$ orthonormale pour le produit scalaire aussi orthogonale pour f.

5 Endomorphismes orthogonaux

E euclidien.

5.1 Généralités

$u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal ssi :

1. $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$ ssi
2. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$ ssi
3. $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$

Corollaire : soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale, $u \in \mathcal{O}(E)$ ssi $M_\mathcal{B}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note $SO(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)/ \det u = +1\}$.

5.2 Génération de $\mathcal{O}(E)$

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des symétries par rapport à des hyperplans de E, $\dim E = n$. $\mathcal{H}$ engendre $\mathcal{O}(E)$; plus précisément, si $u \in \mathcal{O}(E)$, $\exists k \in \mathbb{N}/\ 0 \leqslant k \leqslant n$ et $\exists \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathcal{H}/u = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k$.

5.3 Classification des éléments de $\mathcal{O}(E)$ lorsque $\dim E = 3$

$u \in \mathcal{O}(E)$; on écrit $u = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k$ avec k minimal.

- Si $k = 0$, alors $u = Id$.
- Si $k = 1$, u est une symétrie par rapport à un plan.
- Si $k = 2$, $u = \sigma_1 \circ \sigma_2$ est une rotation (d'angle différent de 2π). Son axe est $\ker(\sigma_1 - Id) \bigcap \ker(\sigma_1 - Id)$. Une fois orientés E et l'axe par le choix d'un vecteur unitaire $\vec{k}$, $M_\mathcal{B}(u)$ est de la forme $M_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où θ ne dépend plus de la façon de compléter $\vec{k}$ en une BOND $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E. On a de plus : $\sin\theta = [x, u(x), k]_{mixte}$.
- Si $k = 3$, $u = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$; $\det u = -1$ donc $\det -u = 1$. $-u$ est donc une rotation d'angle différent de $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.4 Réduction générale des endomorphismes orthogonaux

$u \in \mathcal{O}(E)$, $E_1 = \ker(u - Id)$, $E_{-1} = \ker(u + Id)$. Il existe des plans vectoriels $H_1, \ldots, H_m$ (avec éventuellement $m = 0$) stables par u tels que $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1} \overset{\perp}{\oplus} H_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} H_m$. Remarque : $\operatorname{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Si $\mathcal{B}$ est une BON adaptée, $M_\mathcal{B}(u)$ est diagonale par blocs :

$$M_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} I_{\dim E_1} & & & & \\ & -I_{\dim E_{-1}} & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

6 Projections orthogonales

Soit E préhilbertien réel

6.1 Projections orthogonales sur un sev de dimension finie

Soit F sev de E de dimension finie ; $\forall x \in E$, $\exists! y \in F/y - x \in F^\perp$. Cela montre que $E = F \oplus F^\perp$. Avec ces notations, $\forall z \in E$, $\|x - z\| \geqslant \|x - y\|$ avec égalité ssi $z = y$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ BON de F, $\forall x \in E$, $y = \sum\limits_{i=1}^{m} (e_i \mid x) e_i$.

Corollaire : $(F^\perp)^\perp = F$.

6.2 Propriétés des projecteurs orthogonaux

$(e_1, \ldots, e_m)$ une famille orthonormale, $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. $p : x \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{m} (e_i \mid x) e_i$ est un projecteur, $\ker p = F^{\perp}$ et $\mathrm{Im}(p) = F$. p est de plus symétrique positif et $1-$ lipschitzien, c'est à dire $\forall x, y \in E$, $\|p(x) - p(y)\| \leqslant \|x - y\|$.

Si E est euclidien, tout projecteur autoadjoint est orthogonal et tout projecteur $1-$ lipschitzien est orthogonal.

Formule de Bessel-Parseval :

1. E ev préhilbertien réel, $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_m)$ une famille orthonormale finie. Si $x \in E$, on pose : $x_i = (e_i \mid x)$. Alors $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqslant \|x\|^2$ avec égalité ssi $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

2. E ev préhilbertien réel, $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale infinie. Si $x \in E$ on pose $x_i = (e_i \mid x)$. La série positive $\{x_i^2\}$ est convergente et $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2 \leqslant \|x\|^2$ avec égalité ssi $x \in \overline{\mathrm{Vect}(\mathcal{F})}$ (adhérence de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$).

Espaces préhilbertiens complexes

$\alpha 12 - MP^*$

1 Généralités

1.1 Formes sesquilinéaires

Soit E un $\mathbb{C}-$ev. $f : (x,y) \in E^2 \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{C}$ est une *forme sesquilinéaire* si :

- $\forall x \in E$, $y \longmapsto f(x,y)$ est une forme linéaire
- $\forall y \in E$, $x \longmapsto f(x,y)$ est une *forme semi-linéaire*, c'est à dire $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f(\lambda x, y) = \overline{\lambda} f(x,y)$.

f est *hermitienne* si de plus $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$.

L'ensemble des formes sesquilinéaires sur E, noté $FS(E)$, est un sev de $\mathbb{C}^{E\times E}$; l'ensemble des formes sesquilinéaires hermitiennes $FSH(E)$ est un sev de $FS(E)$ vu comme un $\mathbb{R}-$ev.

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^* la *transconjuguée* de M, c'est à dire $M^* = {}^t\overline{M}$. M est hermitienne ssi $M = M^*$. On note $H_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ hermitiennes ; c'est un sous$-\mathbb{R}-$ev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On a : $\dim_{\mathbb{R}}(H_n(\mathbb{C})) = n^2$.

1.2 Identité de polarisation

Soit $f \in FS(E)$, on pose $q(x) = f(x,x)$ pour tout $x \in E$. On a :

$$\forall x, y \in E, f(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(-x+y) + iq(ix+y) - iq(-ix+y))$$

Conséquences :

1. Soit $f \in FS(E)$, si $\forall x \in E$, $f(x,x) = 0$, alors $f = \underline{0}$.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$; $(X,Y) \longmapsto X^*MY$ est sesquilinéaire. Si $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $X^*MX = 0$, alors $M = 0$.
3. $f \in FS(E)$ est hermitienne ssi $\forall x$, $q(x) \in \mathbb{R}$.

2 Formes positives

2.1 Notion de forme quadratique hermitienne

Soit E un $\mathbb{C}-$ev. $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique hermitienne si il existe une forme sesquilinéaire hermitienne f telle que $\forall x \in E$, $q(x) = f(x,x)$. Dans ce cas, f est l'unique *forme polaire* de q.

$q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique hermitienne ssi :

1. $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $q(\lambda x) = \overline{\lambda}\lambda q(x)$
2. $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}(q(x+y) - q(-x+y) + iq(ix+y) - iq(-ix+y))$ est une forme sesquilinéaire hermitienne

2.2 Propriétés des formes quadratiques hermitiennes positives

Soit f une forme sesquilinéaire hermitienne sur E, q la forme quadratique hermitienne associée. Si q est positive, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|f(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)q(y)}$. Dans ce cas, on a les corollaires suivants :

Corollaire 1 : $q(x) = 0$ implique $\forall y \in E$, $f(x,y) = 0$.

Corollaire 2 : $x \longmapsto \sqrt{q(x)}$ est une semi-norme.

2.3 Formes définies positives

f une fsh, q la fq associée. On dit que f est *définie positive* si $\forall x \neq 0$, $f(x,x) \in \mathbb{R}^{+*}$. On parlera de même de q définie positive lorsque f l'est. On dit encore que f est un *produit scalaire hermitien*, souvent noté $(x \mid y)$, $x \bullet y, \ldots$ $x \longmapsto \sqrt{q(x)}$ est alors une vraie norme, notée $\| \|$.

Cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz : lorsque (x,y) est liée.

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : lorsque (x,y) est positivement liée (E considéré comme $\mathbb{R}-$ev).

Procédé de Gram-Schmidt : avec ces notations, soit $(e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille libre ($\mathcal{I}$ étant une partie non vide de $\mathbb{N}$). Il existe alors une unique famille orthonormale $(\varepsilon_i)_{i\in\mathcal{I}}$ telle que :

- $\forall i \in \mathcal{I}$, $\varepsilon_i \in \mathrm{Vect}(e_j)_{\substack{j\in\mathcal{I}\\ j\leqslant i}}$
- $\forall i \in \mathcal{I}$, $(e_i \mid \varepsilon_i) \in \mathbb{R}^{+*}$

Si $\mathcal{I}$ est fini, $M_{(e_i)}(\varepsilon_j)$ est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Un $\mathbb{C}-$ev muni d'un produit scalaire hermitien est appelé *préhilbertien* (complexe) ; s'il est de dimension finie, on dit qu'il est *hermitien*. Un ev préhilbertien complexe et complet est appelé *espace de Hilbert*.

2.4 Projections orthogonales

2.4.1 Projections orthogonales sur un sous-espace de dimension finie

Soit E un ev préhilbertien, F un sev de dimension finie. Si $x \in E$, $\exists! y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$. Si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ est une BON de F, $y = \sum\limits_{i=1}^{m}(\varepsilon_i \mid x)\varepsilon_i$. On a alors $E = F \oplus F^\perp$. $x \overset{p}{\longmapsto} y$ est le projecteur sur F associé à cette somme directe. $\mathrm{Im}(p) = F$, $\ker p = F^\perp$.

2.4.2 Propriétés liées à la distance

Avec les mêmes notations, si $x \in E$, p vérifie $\forall z \in F$, $\|x - z\| \geqslant \|x - y\|$ avec égalité si et seulement si $z = y$. Le théorème de Pythagore subsiste : $\forall x, y \in E$, $(x \perp y) \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$; de même, on a la formule du parallélogramme $\forall x, y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

2.5 Inégalités de Bessel-Parseval

E un ev préhilbertien, $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ une famille ON finie. On a

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{m}|(\varepsilon_i \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

avec égalité ssi $x \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$. En conséquence, si $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille ON, $\forall x \in E$, $((e_i \mid x))_{i\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et

$$\sum_{i=0}^{+\infty}|(e_i \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

avec égalité ssi $x \in \overline{\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in\mathbb{N}})}$.

3 Compléments

E est un ev hermitien

3.1 Adjoints d'un endomorphisme

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists! v \in \mathcal{L}(E) / \forall x, y \in E$, $(u(x) \mid y) = (x \mid v(y))$; on note $v = u^*$: v est l'*adjoint* de u. Si $\mathcal{B}$ est une BON, $M_{\mathcal{B}}(u^*) = (M_{\mathcal{B}}(u))^* = {}^t\overline{M_{\mathcal{B}}(u)}$. $u \longmapsto u^*$ est semi-linéaire involutive. u est *normal* si u et u^* commutent ; u est *autoadjoint* (ou *hermitien*) si $u = u^*$; u est *unitaire* si $u^*u = Id$. On peut caractériser les endomorphismes unitaires de la manière suivante :

- u est unitaire ssi
- $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$ ssi
- $\forall x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$

On note $\mathbb{U}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u^*u = Id\}$ le *groupe unitaire* ; c'est un sous-groupe de $GL(E)$. u est *antihermitien* si $u^* = -u$; dans ce cas, iu est hermitien.

3.2 Réduction des endomorphismes

Lemme : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

Propriété : si u est normal, alors u est diagonalisable et il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.

3.3 Cas des endomorphismes hermitiens

Si $u^* = u$, les résultats du paragraphe précédent s'appliquent. Mieux : $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$; $\forall \lambda \neq \mu \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda \perp E_\mu$; si F est un sev stable par u, alors $F^\perp$ l'est aussi.

u hermitien est ***positif*** si $\forall x \in E$, $(u(x) \mid x) \in \mathbb{R}^+$ (ssi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$) ; u est ***défini positif*** ssi $\forall x \neq 0$, $(u(x) \mid x) \in \mathbb{R}^{+*}$ (ssi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$).

Si $v \in \mathcal{L}(E)$, $u = v^*v$ est hermitien positif ; il est défini positif ssi de plus $v \in GL(E)$. Si u est hermitien positif, $\exists v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = v^*v$. v est unique si on le suppose hermitien positif, et dans ce cas $v \in \mathbb{R}[u]$. De même si u est hermitien défini positif, il existe $v \in GL(E)$ tel que $u = v^*v$; v est unique si on le suppose défini positif, et dans ce cas $v \in \mathbb{R}[u]$.

Décomposition de Cholesky : Soit M une matrice hermitienne définie positive dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $M = T^*T$.

3.4 Endomorphismes unitaires

Soit $u \in \mathbb{U}(E)$, alors :

1. u est scindé et $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U}$
2. u est diagonalisable et $\exists \mathcal{B}$ BON telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale

Réciproquement, si u satisfait 1. et 2. alors u est unitaire.

Rappel : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Espaces métriques

$\alpha 13 - MP^*$

1 Généralités

1.1 Notion d'espace métrique et de distance

Un ensemble E est un *espace métrique* lorsqu'on le munit d'une *distance*, c'est à dire une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les axiomes suivants :

1. *Séparation* : $\forall (x, y) \in E^2$, $(d(x, y) = 0) \Longleftrightarrow (x = y)$
2. *Symétrie* : $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$
3. *Inégalité triangulaire* : $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

On a alors, en conséquence :

- $|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$
- $\forall z \in E$, $x \longmapsto d(x, z)$ est 1-lipschitzienne
- Si E est un $\mathbb{R}-$ ou $\mathbb{C}-$ev normé, on peut le munir de la distance $d : (x, y) \longmapsto \|x - y\|$

Construction d'espaces métriques :

1. Soit $(E_i, d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'espaces métriques, on peut munir $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ de l'une des trois distances suivantes : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \in E_1 \\ \vdots \\ x_n \in E_n \end{pmatrix} \in E$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $D_1(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$, $D_2(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_i))^2}$, $D_\infty(X, Y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i, y_i)$. E est alors un espace métrique.
2. Soit (E, d) un espace métrique, $F \subset E$, on munit F de $d_F = d|_{F \times F}$; (F, d_F) est alors un espace métrique.

1.2 Continuité

1.2.1 Continuité en un point

Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow E'$. Soit $x_0 \in E$, f est *continue* en x_0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \forall x \in E$, $d(x, x_0) \leqslant \alpha \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leqslant \varepsilon$. On a les propriétés suivantes :

- Soit $(E, d) \xrightarrow{f} (E', d') \xrightarrow{g} (E'', d'')$; si f est continue en x_0 et g en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.
- Soit $f : (E, d) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} (E_i, d_i)$, $E' = \prod_{i=1}^{m} (E_i, d_i)$ muni de $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. On peut écrire f sous la forme $f : x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Alors f est continue en x ssi chaque f_i est continue en x.
- Soit $f : E' = \prod_{i=1}^{m} (E_i, d_i) \longrightarrow (E, d)$, E' étant muni de $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Si f est continue en $x = (x_1, \ldots, x_m)$ alors chaque f_i est continue en x_i (pas de réciproque !)
- Soit (E, d) un espace métrique, $F \subset E$ muni de d_F. Soit $x_0 \in F$; si f est continue en x_0 au sens de d, alors $f|_F$ l'est aussi au sens de d_F. La réciproque est fausse.

1.2.2 Continuité sur E

$f : E \longrightarrow E'$ est ***continue sur*** E si elle l'est en tout point de E. Si $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$, on peut envisager deux notions :

- f est continue en tout point de A
- $f' : (A, d_A) \longrightarrow E'$ est continue

Ces deux notions sont équivalentes.

1.2.3 Uniforme continuité

$f : E \longrightarrow E'$ est ***uniformément continue*** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \forall (x, x') \in E^2$, $d(x, x') \leqslant \alpha \Longrightarrow d'(f(x), f(x')) \leqslant \varepsilon$. Si f est uniformément continue, alors f est continue. (réciproque fausse)

1.2.4 Applications lipschitziennes

$f : E \longrightarrow E'$ est $k-$*lipschitzienne* si $\forall (x, x') \in E^2$, $d'(f(x), f(x')) \leqslant k d(x, x')$. Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

1.3 Suites

Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ admet $l \in E$ comme ***limite*** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $d(x_n, l) \leqslant \varepsilon$. l est alors unique.

Une suite (x_n) est ***de Cauchy*** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 / \forall n \geqslant n_0$, $\forall p \geqslant 1$, $d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \varepsilon$. Toute suite convergente est de Cauchy. E est dit ***complet*** si toute suite de Cauchy de E converge. Par exemple, $(\mathbb{Q}, |\,|)$ n'est pas complet.

Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, une ***valeur d'adhérence*** de (x_n) est la limite d'une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente, s'il en existe. Si $A \subset E$, $l \in A$, $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, dire que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ équivaut à dire que $x_n \longrightarrow l$ dans (A, d_A). Dire que (x_n) est de Cauchy équivaut à dire que (x_n) est de Cauchy dans (A, d_A).

On a une caractérisation séquentielle de la continuité : soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$, $x \in E$, f est continue en x ssi pour toute suite (x_n) dans E de limite x, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

1.4 Ouverts d'un espace métrique

(E, d) un espace métrique. Soit $x \in E$, $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit :

- $\mathrm{B}(x, \rho) = \{y \in E / d(x, y) < \rho\}$ ***boule ouverte*** de centre x et de rayon ρ
- $\mathrm{B}'(x, \rho) = \{y \in E / d(x, y) \leqslant \rho\}$ ***boule fermée*** de centre x et de rayon ρ

Une partie $\Omega \subset E$ est dite ***ouverte*** si $\forall x \in \Omega$, $\exists \rho \in \mathbb{R}^{+*} / \mathrm{B}(x, \rho) \subset \Omega$. Si $E = \mathbb{R}$, un intervalle est une partie ouverte ssi il est de la forme $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. On a les propriétés suivantes :

1. E et $\varnothing$ sont des ouverts
2. Si $\mathcal{I}$ est un ensemble d'indices (fini ou non) et si $(\theta_i)_{i \in \mathcal{I}}$ est une famille d'ouverts, alors $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \theta_i$ est un ouvert
3. Si $(\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille finie d'ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^{n} \theta_i$ est un ouvert
4. Dans un espace métrique produit, tout produit cartésien d'ouverts est ouvert.

Caractérisation : soit $f : E \longrightarrow E'$, f est continue ssi pour tout ouvert $\theta' \subset E'$, $f^{-1}(\theta')$ est un ouvert de E.

Soit (E, d) un espace métrique, $(A, d_A) \subset E$, si $\Omega \subset A$, Ω est un ouvert de (A, d_A) ssi il existe un ouvert Ω' de E tel que $\Omega = \Omega' \bigcap A$.

1.5 Fermés

Soit (E, d) un espace métrique, F est un ***fermé*** si $E \backslash F$ est un ouvert. Si $E = \mathbb{R}$, un intervalle est un fermé ssi il est de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ ou $[a, b]$ avec a et b finis. On a les propriétés suivantes :

- E et $\varnothing$ sont des fermés
- toute intersection (finie ou non) de fermés est fermée

- toute réunion finie de fermés est fermée

Caractérisation séquentielle : (E,d) un espace métrique, $F \subset E$. F est un fermé ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergente, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in F$.

- Dans un espace métrique produit, tout produit cartésien de fermés est fermé
- (A, d_A) espace métrique induit par (E,d). $F \subset A$ est un fermé ssi il est de la forme $F' \bigcap A$ où F' est un fermé de E.

1.6 Intérieur d'une partie

(E,d) un espace métrique, $A \subset E$. $x \in E$ est dit *intérieur* à A si $\exists \rho > 0 / \mathrm{B}(x,\rho) \subset A$. On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A. On a les propriétés :

1. $\overset{\circ}{E} = E$, $\overset{\circ}{\varnothing} = \varnothing$
2. Si $A \subset E$, $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand : si Ω est un ouvert inclus dans A, alors $\Omega \subset \overset{\circ}{A}$
3. Si $A' \subset A$, $\overset{\circ}{A'} \subset \overset{\circ}{A}$
4. Si A, B sont deux parties de E, alors : $(A \overset{\circ}{\bigcap} B) = \overset{\circ}{A} \bigcap \overset{\circ}{B}$, $(A \overset{\circ}{\bigcup} B) \supset \overset{\circ}{A} \bigcup \overset{\circ}{B}$

1.7 Adhérence d'une partie

(E,d) un espace métrique, $A \subset E$. $x \in E$ est *adhérent* à A si toute boule ouverte non vide de centre x rencontre A : $\forall \rho > 0$, $\mathrm{B}(x,\rho) \bigcap A \neq \varnothing$, ou encore : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in A / d(x,y) \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in E$; x est adhérent à A ssi il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que $x = \lim x_n$. On note $\overline{A}$ l'*adhérence* de A, c'est à dire l'ensemble des points adhérents à A.

Propriétés :

1. $\overline{A} \supset A$; de plus, si F est un fermé contenant A, alors $\overline{A} \subset F$
2. si $A \subset E$, $\overline{A} = E \backslash (E \overset{\circ}{\backslash} A)$
3. si $A \subset B$, $\overline{A} \subset \overline{B}$
4. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$; $\overline{A \bigcap B} \subset \overline{A} \bigcap \overline{B}$

Si E est un espace métrique, on dit que A est *dense* dans E si $\overline{A} = E$; si $A \subset B \subset E$, on dit que A est *dense* dans B si $B \subset \overline{A}$.

- Soit $A \subset B \subset E$, $f, g : (E,d) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} (E', d')$. Si $f|_A = g|_A$ et A est dense dans B, alors $f = g$.
- $f, g : B \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$. Si $\forall x \in A$, $f(x) \leqslant g(x)$ et A dense dans B, alors $f \leqslant g$.

2 Compacité

2.1 Définitions

Soit (E,d) un espace métrique. E est dit *compact* si toute suite dans E admet au moins une valeur d'adhérence. Une partie $A \subset E$ est dite *compacte* si toute suite dans A admet au moins une valeur d'adhérence dans A. Si $A \subset E$ est compacte, l'espace métrique induit (A, d_A) est compact.

2.2 Propriétés

1. Si E est compact, tout fermé de E est compact.
2. Soit $F \subset E$; si F est compact, F est fermé et borné.
3. Soit $(E, D) = \prod\limits_{i=1}^{n} (E_i, d_i)$ où $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Si pour tout i, A_i est un compact de E_i, alors $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ est un compact de E.
4. (E,d), (E',d') deux espaces métriques, $f : A \subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E'$; si A est compacte alors $f(A)$ est compacte.
5. Caractérisation des compacts : Soit $E = \mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, produit cartésien de $(\mathbb{K}, |\,|)$, muni de $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Une partie de E est compacte ssi elle est fermée bornée. (Remarque : cela reste vrai dans les $\mathbb{K}-$ev de dimension finie.)
6. *Théorème de Heine* :
   (a) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ une partie compacte non vide. Si $f : A \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$, f est bornée et atteint ses bornes.
   (b) E, E' deux espaces métriques, A compact inclus dans E et $f : A \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E'$. Alors f est uniformément continue.

2.3 Applications (exercices)

2.3.1 Modèles de compacts

1. On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.
2. Soit E un plan affine euclidien, muni de la distance euclidienne. Tout cercle est alors un compact.
3. Soit E un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite x. Alors $A = \{x, x_1, \ldots\}$ est compact.

2.4 Compacité, convergence uniforme et intégrales

2.4.1 Convergence uniforme

Soit E, E' deux espaces métriques, $A \subset E$, (u_n) une suite de fonctions $A \longrightarrow E'$. On dit que (u_n) *converge simplement* vers $u : A \longrightarrow E'$ si $\forall x \in A$, $\lim u_n(x) = u(x)$. On dit que (u_n) *converge uniformément* vers u si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 / \forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in A$, $d'(u_n(x), u(x)) \leqslant \varepsilon$.

Si toutes les u_n sont continues en $x_0 \in A$ (resp. sur A) et si (u_n) converge uniformément vers u, alors u est continue en x_0 (resp. sur A).

2.4.2 Intégrales à paramètres

Soit E un espace métrique, $A \subset E$, I un segment de $\mathbb{R}$, $f : A \times I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$. Alors $x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue.

3 Espaces métriques complets

(E,d) est dit *complet* si toute suite de Cauchy dans E converge. $A \subset E$ est dite *complète* si (A, d_A) est complet.

3.1 Propriétés

1. Soit A une partie d'un espace métrique E quelconque, si A est complète, alors A est fermée.
2. Soit E un espace métrique complet, si $A \subset E$ est fermée, alors A est complète.
3. Soit E un espace métrique, si $A \subset E$ est compacte, alors A est complète.
4. Soit $E = \prod\limits_{i=1}^{n} E_i$, $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Si pour tout i, $A_i \subset E_i$ est complète, alors $A = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ est complète.

3.2 Théorème du point fixe (hors programme)

Soit E un espace métrique, $A \subset E$. $f : A \longrightarrow A$ est une *contraction* (est *contractante*) s'il existe $k < 1$ tel que f soit $k-$lipschitzienne. Dans ce cas :

1. Il existe au plus un $l \in A$ tel que $f(l) = l$.
2. Soit $a \in A$ et soit (u_n) la suite récurrente telle que $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge, sa limite est un point fixe de f.
3. Si f admet un point fixe l, alors pour tout $a \in A$, la suite précédente converge vers l.

Le théorème du point fixe : Soit E un espace métrique, $A \subset E$ une partie complète, $f : A \longrightarrow A$ contractante. Dans ce cas,

1. f admet un unique point fixe $l \in A$.
2. $\forall a \in A$, la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

3.3 Théorème de projection sur un convexe

Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe) muni de la norme associée au produit scalaire. Si $A \subset E$ est convexe et complète, alors $\forall x \in E$, $\exists ! a \in A$ tel que $d(x,a) = \inf\{d(x,y), y \in A\} \overset{def}{=} d(x,A)$.

Remarques :

1. Soit (E,d) un espace métrique, et $A \subset E$ compacte non vide. Alors $\forall x \in E$, $\exists a \in A / d(x,a) = d(x,A)$.
2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un fermé non vide de E. Alors $\forall x \in E$, $\exists y \in F / d(x,y) = d(x,F)$.

4 Connexité par arc

4.1 Généralités

Soit E un espace métrique, $A \subset E$; si $a, b \in A$, un arc joignant a et b est la donnée d'une application $f : [0,1] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} A$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. On définit la relation $\mathcal{R}$: $a\mathcal{R}b$ ssi a et b peuvent être joints par arc dans A. C'est une relation d'équivalence. On dit que A est *connexe par arcs* si deux éléments quelconques de A peuvent être joints par un arc.

4.2 Propriétés

1. Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
2. Si E est un espace vectoriel réel (ou complexe) normé, tout convexe est connexe par arcs.
3. $A \subset E$ est dite *étoilée* si il existe $a_0 \in A$ tel que $\forall x \in A$, $[a_0, x] \subset A$. Un partie étoilée est connexe par arcs.
4. Soit (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, A un connexe par arcs de E, $f : A \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E'$; alors $A' = f(A)$ est connexe par arcs. Conséquence : si $E' = \mathbb{R}$, $f(A)$ est un intervalle. Si $c \in [f(t), f(t')]$, alors $\exists t'' \in A / f(t'') = c$.
5. Soit $(E,D) = \prod_{i=1}^{n} (E_i, d_i)$, $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Si A_i est un connexe par arcs de E_i pour tout i, alors $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ est connexe par arcs.

4.3 Complément : connexité

Soit E un espace métrique, $A \subset E$ est dite *connexe* si dans l'espace métrique induit (A, d_A), A et $\varnothing$ sont les seules parties ouvertes et fermées à la fois. Cela équivaut à : pour tous ouverts θ et θ' de E tels que $\theta \bigcap \theta' = \varnothing$, si $A \subset \theta \bigcup \theta'$, alors $A \subset \theta$ ou $A \subset \theta'$. On a les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ est connexe
- tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe
- tout connexe par arcs est connexe

Espaces vectoriels normés

$\alpha 14 - MP^*$

1 Généralités

1.1 Normes

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}\,\text{ou}\,\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}-$ev. Une *norme* est une application $E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ souvent notée $\| \,\|$ vérifiant les axiomes suivants :

- *Séparation* : $\forall x \in E$, $(\|x\| = 0) \Longrightarrow (x = 0)$
- *Homogénéité* : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- *Inégalité triangulaire* (ou *sous-additivité*) : $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Si E est une $\mathbb{K}-$algèbre, $\| \,\|$ est une norme d'algèbre si de plus : $\forall (x, y) \in E^2$, $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ (*sous-multiplicativité*). On impose également, en général, que $\|1_E\| = 1$.

1.2 Exemples

1.2.1 Normes associées à un produit scalaire

En général, c'est la vérification de l'inégalité triangulaire qui pose problème. Dans certains cas, on a $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ où φ est un produit scalaire (éventuellement hermitien). Dans ce cas, il est immédiat que $\| \,\|$ est bien une norme.

Exemple : $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $\|x\| = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t}$.

1.2.2 Normes $\| \,\|_p$ sur $\mathbb{K}^n$

Soit $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$. On définit, pour $p \in \mathbb{N}^*$: $\|x\|_p = (\sum\limits_{i=1}^{n} |x|^p)^{\frac{1}{p}}$, ainsi que $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$.

Inégalité de Hölder (hp): si $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, $\forall p, q > 0/\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q$.

On en déduit que pour tout p, $\| \,\|_p$ est bien une norme. On a de plus les résultats suivants :

- $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$
- $\|x\|_\infty \leqslant 1 \cdot \|x\|_1$ (majoration optimale) ; $\|x\|_\infty \leqslant 1 \cdot \|x\|_2$ (optimale) ; $\|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$ (optimale) ; $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$ (optimale) ; $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$; $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$.

1.2.3 Normes $\| \,\|_p$ sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$

Soit I un segment de $\mathbb{R}$. On définit pour $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}$: $\|f\|_p = (\int_I |f|^p)^{\frac{1}{p}}$, et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$. On a $\|f\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$. Les $\| \,\|_p$ sont encore des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

1.3 Normes équivalentes

Soit E un $\mathbb{K}-$ev, deux normes $\| \,\|$ et $\| \,\|'$ sont dites *équivalentes* si

- $\exists \alpha > 0/\forall x \in E$, $\|x\| \leqslant \alpha\|x\|'$
- $\exists \beta > 0/\forall x \in E$, $\|x\|' \leqslant \beta\|x\|$

Cela équivaut à : $\alpha\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \alpha'\|x\|$. Supposons E muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2. Notons E_1 (resp. E_2) l'espace métrique E muni de la distance associée à N_1 (resp. à N_2).

- Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, (x_n) converge au sens de N_1 ssi (x_n) converge au sens de N_2.
- Sont indépendantes de la norme (N_1 ou N_2) les notions de suite de Cauchy, valeur d'adhérence et complétude : E_1 est complet ssi E_2 est complet. De même, les notions d'ouvert, de fermé, d'intérieur, d'adhérence et de compacité ne dépendent pas de la norme.
- Soit $f : A \subset E \longrightarrow (E', d')$; les notions de continuité, uniforme continuité et caractère lipschitzien ne dépendent pas de la norme (en revanche, la constante de Lipschitz éventuelle en dépend en général).
- De même pour $f : A \subset E' \longrightarrow E$.

2 Continuité des applications linéaires

2.1 Caractérisation des applications linéaires continues

Soit $(E, \| \,\|)$, $(E', \| \,\|')$ deux espaces normés, $f \in \mathcal{L}(E, E')$; les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue
2. $\exists k \geqslant 0$ tel que f soit $k-$lipschitzienne
3. $\exists k \geqslant 0/\forall x \in E$, $\|f(x)\|' \leqslant k\|x\|$
4. f est uniformément continue
5. f est continue en 0
6. $f|_{\mathrm{B}(0,1)}$ est bornée

2.2 Norme subordonnée d'une application linéaire continue

Soit $(E, \| \,\|)$, $(E', \| \,\|')$ deux espaces normés, $f \in \mathcal{L}(E, E')$ continue. La *norme subordonnée* de f notée $|||f|||$ est définie par $|||f||| \overset{def}{=} \min\{k \geqslant 0/\forall x \in E, \|f(x)\|' \leqslant k\|x\|\}$. C'est la constante de Lipschitz de f. On a encore $|||f||| = \sup\{\frac{\|f(x)\|'}{\|x\|}, x \in E\backslash\{0\}\}$, ainsi que $|||f||| = \sup\{\|f(x)\|', x \in A\}$ avec $A \in \{\mathrm{B}(0, 1), \mathrm{B}'(0, 1), \mathrm{B}'(0, 1)\backslash\mathrm{B}(0, 1)\}$. On a toujours : $\|f(x)\|' \leqslant |||f||| \cdot \|x\|$. $|||f|||$ est enfin le scalaire k vérifiant $\forall x \in E$, $\|f(x)\|' \leqslant k\|x\|$ et l'une des trois propriétés : $\forall k' < k$, $\exists x \in E/\|f(x)\|' > k'\|x\|$; il existe une suite (x_n) sans élément nul telle que $\frac{\|f(x_n)\|'}{\|x_n\|}$ tende vers k ; $\exists x \in E\backslash\{0\}/\|f(x)\|' = k\|x\|$.

2.3 Cas d'un espace vectoriel préhilbertien

Soit E un ev préhilbertien, $f \in \mathcal{L}(E)$ supposée continue. On note $\mathrm{B}' = \mathrm{B}'(0, 1)$. On a : $|||f||| = \sup\limits_{x,y \in \mathrm{B}'} |(f(x) \mid y)| = |||f^*|||$.

Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est continue et $|||f||| = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(f^* f)}$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, on a $|||u||| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$. Si de plus u est positif, $|||u||| = \max \mathrm{Sp}(u)$.

2.4 L'espace vectoriel normé $\mathcal{L}_C(E, E')$

2.4.1 Cas général

Soient $(E, \| \,\|)$ et $(E', \| \,\|')$ deux espaces vectoriels normés. Par définition, $\mathcal{L}_C(E, E')$ est l'ensemble des fonctions linéaires continues $E \longrightarrow E'$. $\mathcal{L}_C(E, E')$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E')$. $f \longrightarrow |||f|||$ est une norme sur ce sev.

Propriété : $(E, \| \,\|)$, $(E', \| \,\|')$, $(E'', \| \,\|'')$ trois ev normés, si $f \in \mathcal{L}_C(E, E')$ et $g \in \mathcal{L}_C(E,' E'')$, alors $|||g \circ f||| \leqslant |||f||| \cdot |||g|||$.

2.4.2 L'algèbre normée $\mathcal{L}_C(E)$

Soit E un ev normé, on note $\mathcal{L}_C(E) \overset{def}{=} \mathcal{L}_C(E, E)$. C'est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$; en outre, munie de $||| \,|||$, c'est une algèbre normée.

Cas de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$: si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on lui associe $u : X \in \mathbb{K}^n \longmapsto MX$. Alors $N(M) = |||u|||$ est une norme d'algèbre sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si on munit $\mathbb{K}^n$ de $\| \,\|_1$ (resp. $\| \,\|_2$, $\| \,\|_\infty$), alors $N_1(M) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |m_{i,j}|$ (resp. $N_2(M) = \sqrt{\max \mathrm{Sp}({}^t MM)}$, $N_\infty(M) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$) est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

2.5 Cas des applications multilinéaires

Soit $(E_1, \| \|_1), \dots, (E_m, \| \|_m), (E', \| \|')$ $(m+1)$ ev normés. Soit $f : E = \prod_{i=1}^{m} E_i \longrightarrow E'$ un application $m-$ linéaire. E peut être muni de $x \longmapsto \sum x_i$ ou $x \longmapsto \max x_i$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est continue
- f est continue en $(0, \dots, 0)$
- il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|' \leqslant k \prod_{i=1}^{m} \|x_i\|_i$.

Par exemple : si E est euclidien orienté, l'application produit mixte $[x_1, \dots x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe, est continue. Si E est préhilbertien muni de la norme associée à son produit scalaire, $(x, y) \longmapsto (x \mid y) \in \mathbb{K}$ est continue. Si E est un espace vectoriel normé de dimension 3, le produit vectoriel $(x, y) \longmapsto x \wedge y$ est continu.

3 Espaces vectoriels normés complets

$(E, \| \|)$ est dit *de Banach* s'il est complet pour cette norme. Une *algèbre de Banach* est une algèbre normée complète.

3.1 Exemples et contre-exemples

$\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$ muni de $\| \|_1$ n'est pas complet ; muni de $\| \|_\infty$, il l'est. Soit E, E' deux espaces vectoriels normés ; si E' est complet, alors $\mathcal{L}_C(E, E')$ est de Banach. Si E est complet, alors $\mathcal{L}_C(E)$ est une algèbre de Banach.

3.2 Séries dans les espaces vectoriels normés complets

$(E, \| \|)$ un ev normé ; on dit que la *série* $\{u_n\}$ converge si $n \in \mathbb{N} \longmapsto \sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite. On utilisera les mêmes notations que pour les séries réelles (cf. $\alpha 6$). Si $\{u_n\}$ converge alors $u_n \longrightarrow 0$. On dit que $\{u_n\}$ est *absolument convergente* si la série réelle $\{\|u_n\|\}$ converge. Si E n'est pas complet, une série absolument convergente peut éventuellement diverger. En revanche si E est complet, alors toute série absolument convergente est convergente.

3.3 Exponentielle dans une algèbre de Banach

Soit A une algèbre de Banach. Si $u \in A$, $\{\frac{u^n}{n!}\}_{n \geqslant 0}$ est absolument convergente. On pose alors $\exp u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$, que l'on pourra encore noter abusivement e^u. Comme $\|1_A\| = 1$, on a de plus $\|e^u\| \leqslant e^{\|u\|}$.

Compléments : On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme.

1. Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $e^{{}^tM} = {}^te^M$
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $e^{P^{-1}MP} = P^{-1}e^M P$
3. Si M est diagonalisable (resp. triangulaire supérieure), e^M est diagonalisable (resp. triangulaire supérieure)
4. Si M est scindée, $\det e^M = e^{\mathrm{tr}(M)}$
5. (hp) Si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$

Applications :

- si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in SO_n(\mathbb{R})$
- Soit E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ scindé. Alors il existe $\delta, \nu \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u = \delta + \nu$, $\delta\nu = \nu\delta$, δ diagonalisable et ν nilpotent
- Soit un système différentiel $X' = AX$ avec $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vecteur inconnu fonction de t vérifiant $X(0) = X_0$ fixé, et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ constante. L'unique solution de ce système est $t \longmapsto e^{tA} X_0$

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Équivalence des normes

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, deux normes quelconques sont équivalentes.

4.2 Théorème de Borel-Lebesgue

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Une partie de E est compacte ssi elle est fermée bornée.

4.3 Compléments

1. Tout ev normé de dimension finie est complet
2. Soit E un ev normé, F sev de E de dimension finie, alors F est fermé et complet.

4.4 Continuité des applications linéaires

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, E' un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors f est continue. On a donc $\mathcal{L}_C(E, E') = \mathcal{L}(E, E')$. De même si $f : \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow E'$: si tous les E_i sont de dimension finie, f est continue.

4.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit E un espace métrique, $A \subset E$, $x \in E$ est un *point d'accumulation* de A ssi $x \in \overline{A \backslash \{x\}}$. Cela équivaut à : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X / X \neq x$ et $X \in A \bigcap (\mathrm{B}(x, \varepsilon))$; ou encore à :$\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ non stationnaire telle que $x = \lim x_n$; ou enfin à : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \bigcap A$ est de cardinal infini.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : Si E est un ev normé de dimension finie et $A \subset E$ de cardinal infini, alors A possède au moins un point d'accumulation.

Fonctions vectorielles

$\alpha 15 - MP^*$

1 Limites, continuité, calcul différentiel

1.1 Notion de limite

Soit E un ev normé de dimension finie (evnf), $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$. Si $x \in \overline{A}$, on dit que $\lim_{y \to x} f(y) = l \in E$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \forall y \in A$, $[(y \neq x) \wedge (|y - x| \leqslant \alpha)] \Longrightarrow (\|f(y) - l\| \leqslant \varepsilon)$. Elle ne dépend pas de la norme.

1.2 Continuité

E un evnf, $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$; c'est la notion classique puisque $\mathbb{R}$ et E sont a fortiori des espaces métriques. Si $x \in A$, f est continue en x ssi $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$.

1. La continuité en un point (resp. sur A) ne dépend pas de la norme considérée
2. On peut toujours écrire $f : x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $f_i : A \longrightarrow E$. f est alors continue ssi chaque f_i l'est.

1.3 Dérivée en un point, fonction dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un evnf, $f : I \longrightarrow E$. Si $x \in I$, $f'(x)$ est, si elle existe, la quantité $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Si f est dérivable en tout point de I, on peut ainsi définir la *fonction dérivée* $f' : I \longrightarrow E$.

$f'(x)$ existe ssi $f(x+h) = f(x) + h \cdot l + \vec{o}(h)$, avec $\|\vec{o}(h)\| = o(h)$. Dans ce cas, $f'(x) = l$. On peut ainsi définir les notions classiques $\mathcal{D}^1$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{D}^k$, $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$.

1.4 Calcul différentiel

1.4.1 Linéarité

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E$, $l \in \mathcal{L}(E, F)$ où E, F sont deux evnf. Alors $l \circ f$ est $\mathcal{D}^1$ et $(l \circ f)' = l \circ (f')$.

Soit $f, g : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E$, E evnf. Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{D}^1$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

1.4.2 $n-$linéarité

$E_1, \ldots E_n, E$ des evnf, $f_i : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E_i$, $\Phi : \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow E$ $n-$linéaire. Soit $F : x \in I \longmapsto \Phi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$; F est $\mathcal{D}^1$ et : $\forall x \in I$, $F'(x) = \Phi(f_1'(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) + \Phi(f_1(x), f_2'(x), \ldots, f_n(x)) + \ldots + \Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n'(x))$.

Exemples :

- $M, N : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, alors $t \longmapsto M(t)N(t)$ est $\mathcal{D}^1$ et $(MN)' = M'N + MN'$.
- E un evnf, $f : I \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E$, $\lambda : I \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathbb{K}$; alors $t \longmapsto \lambda(t) f(t)$ est $\mathcal{D}^1$ et : $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$. De même, si $\lambda : I \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathbb{K}^*$, $(\frac{f}{\lambda})$ est $\mathcal{D}^1$ et $(\frac{f}{\lambda})' = \frac{\lambda f' - \lambda' f}{\lambda^2}$.

On a la formule de Leibniz : $f_1 : I \xrightarrow{\mathcal{D}^k} E_1$, $f_2 : I \xrightarrow{\mathcal{D}^k} E_2$, $\varphi : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ bilinéaire, $F : t \in I \longmapsto \varphi(f_1(t), f_2(t))$. Alors F est $\mathcal{D}^k$ et $\forall t \in I$, $F^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \varphi(f_1^{(i)}(t), f_2^{(k-i)}(t))$.

2 Inégalités du calcul différentiel

2.1 Inégalités des accroissements finis

Soit E un evnf, une fonctions $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ satisfait les *conditions de Rolle* si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f et g satisfont les conditions de Rolle.

- Propriété 1 : Si de plus on a $\forall x \in]a,b[$, $\|f'(x)\| \leqslant g'(x)$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$.
- Propriété 2 (cas particulier) : Soit $M \in \mathbb{R}^+$, $g : x \longmapsto Mx$. Si f satisfait les hypothèses de Rolle et $\forall x \in]a,b[$, $\|f'(x)\| \leqslant M$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b-a)$.

Corollaires : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow E$ telle que f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

1. Si $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est constante sur I.
2. Si f' est bornée, alors f est lipschitzienne.

2.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit E un evnf, $f : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^{n+1}} E$. Si $\forall x \in [a,b]$, $\|f^{(n+1)}(x)\| \leqslant M$, alors

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \gamma_{n+1}$$

avec $\|\gamma_{n+1}\| \leqslant M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

2.3 Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^n} E$. Soit $a \in I$, alors : $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$.

3 Calcul intégral

3.1 Intégrabilité sur un segment

Soit E un evn, $f : [a,b] \longrightarrow E$. On appelle somme de Riemann de f sur $[a,b]$ toute expression de la forme :

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(c_i)$$

où $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$ est un partage de $[a,b]$, noté σ, et pour tout i, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$. On appelle $\delta(\sigma) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)$ le *module* du partage. f est *intégrable* sur $[a,b]$ si il existe $I \in E$ tel que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 /\ (\delta(\sigma) \leqslant \alpha) \Longrightarrow (\|S(f) - I\| \leqslant \varepsilon)$. I est alors unique et on pose : $\int_a^b f(t) \mathrm{d}t = I$. Si E est complet, toute fonction $\mathcal{C}^0$ (même $\mathcal{C}^0_m$) est intégrable sur tout segment.

- Inégalité triangulaire : E un evnf, $f : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} E$, alors $\| \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \| \leqslant \int_a^b \|f(t)\| \mathrm{d}t$.
- Intégration par parties : Si I est un segment, $f_1 : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1_m} E_1$, $f_2 : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1_m} E_2$, $\mathcal{B} : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ bilinéaire, alors :

$$\int_a^b \mathcal{B}(f_1'(x), f_2(x)) \mathrm{d}x + \int_a^b \mathcal{B}(f_1(x), f_2'(x)) \mathrm{d}x = [\mathcal{B}(f_1(x), f_2(x)]_a^b$$

- Formule de Taylor-Laplace : avec les notations du 2.2, $\gamma_{n+1} = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$.

3.2 Intégration sur un intervalle quelconque

E evn, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} E$. Même si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ a un sens pour tout segment $[a,b] \subset I$, cela ne suffit pas à donner un sens à $\int_I f$. Si E est de Banach et si $\|f\|$ est intégrable sur I, alors $\int_I f$ a un sens (par exemple $\int_I f = \lim\limits_{\substack{X \to \inf I \\ Y \to \sup I}} \int_X^Y f(t)\mathrm{d}t$). On dit alors que f est *intégrable* sur I. Si E est de Banach :

- Propriétés : Si $I = (a,b)$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $c \in I$ et $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} E$, f est intégrable ssi $f|_{(a,c]}$ et $f|_{[c,b)}$ le sont. Dans ce cas, $\int_I f = \int_{(a,c]} f + \int_{[c,b)} f$.
- Intégration par parties : Soit E, E_1, E_2 trois evnf, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0,\mathcal{C}^1_m} E_1$, $g : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0,\mathcal{C}^1_m} E_2$, $\mathcal{B} : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ bilinéaire. Si $\mathcal{B}(f_1', f_2)$ et $\mathcal{B}(f_1, f_2')$ sont intégrables, alors $\int_I \mathcal{B}(f_1', f_2) + \int_I \mathcal{B}(f_1, f_2') = [\mathcal{B}(f_1, f_2)]_{\inf I}^{\sup I}$.
- Si $\lim\limits_{\substack{X \to \inf I \\ Y \to \sup I}} \int_X^Y f(t)\mathrm{d}t$ existe mais f non intégrable, on dit que f est *semi-intégrable*. Par exemple, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est semi-intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Soit $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} E$ semi-intégrable ; si $c \in I$, $\exists \lim\limits_{Y \to \sup I} \int_c^Y f(t)\mathrm{d}t$ et $\exists \lim\limits_{X \to \inf I} \int_X^c f(t)\mathrm{d}t$; cela permet de définir $\int_I f = \lim\limits_{Y \to \sup I} \int_c^Y f + \lim\limits_{X \to \inf I} \int_X^c f$.

3.3 Théorème de relèvement

On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} \mathbb{U}$, alors :

1. $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in I$, $f(t) = e^{i\varphi(t)}$.
2. Si deux fonctions φ_1, $\varphi_2 : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$ satisfont cela, alors $\exists m \in \mathbb{Z} / \varphi_2 - \varphi_1 = \underline{2m\pi}$.

Tout cela reste vrai avec $k = 0$. De même si $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} \mathbb{C}^*$, $\exists \rho : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}^{+*}$, $\exists \theta : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I$, $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$. Dans ce cas, ρ est unique et θ est unique à $2m\pi$ près ($m \in \mathbb{Z}$).

On en déduit une condition suffisante de représentation polaire : Soit E un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\gamma : t \in I \longmapsto (x(t), y(t)) \in E$, avec $x, y : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$ On suppose que pour tout $t \in I$, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ forment une famille libre. Dans ce cas, pour tout t, $(x(t), y(t)) = (\rho(t)\cos\theta(t), \rho(t)\sin\theta(t))$, où $\rho : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}^+$ et $\theta : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$. $\theta|_I^{\theta(I)}$ est un $\mathcal{C}^k-$difféomorphisme de I sur $\theta(I) = J$. L'application $\rho = \rho(\omega)$ est définie par : $\forall \omega$, $\rho(\omega) = \rho(\theta^{-1}(\omega)) : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

3.4 Rappel : difféomorphismes

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^* \bigcup \{+\infty\}$, on dit que $f : I \longrightarrow J$ est un $\mathcal{C}^k-$*difféomorphisme* de I sur J si :

- f est $\mathcal{C}^k$ sur I
- f est bijective
- f^{-1} est $\mathcal{C}^k$ sur J.

Fonctions de plusieurs variables réelles

$\alpha 16 - MP^*$

Soit E, E' deux $\mathbb{R}$−evnf, on considère les fonctions $f : A \subset E \longrightarrow E'$.

1 Classe d'une fonction

1.1 Notion de limite en un point

$f : A \subset E \longrightarrow E'$; soit $x \in \overline{A}$, on dit que $l = \lim\limits_{y \to x} f(y)$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / [(y \in A) \wedge (\|y - x\| \leqslant \alpha)] \Longrightarrow (\|f(y) - l\| \leqslant \varepsilon)$. Si cette limite existe, elle est unique. $l = \lim\limits_{y \to x} f(y)$ ssi pour toute suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}} / \lim y_n = x$, alors $\lim f(y_n) = l$.

1.2 Différentiabilité d'une application

Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow E'$; f est ***différentiable*** en $x_0 \in \Omega$ si il existe $l \in \mathcal{L}(E, E')$ telle que $f(x_0+h) = f(x_0)+l(h)+\vec{o}(h)$, avec $\|\vec{o}(h)\| = o(h)$. l est alors unique : c'est la ***différentielle*** de f en x_0, ou ***application linéaire tangente*** à f en x_0. On note $l = df_{x_0}$ ou $d_{x_0}f$ ou $(df)_{x_0}$.

- Si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0.
- Si E et E' ne sont pas de dimension finie, on impose de plus $l \in \mathcal{L}_C(E, E')$.
- $\forall h$, $df_{x_0}(h) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$ s'appelle aussi *dérivée de f selon le vecteur h.*

On dit que f est ***différentiable sur*** Ω si elle l'est en tout point de Ω. On peut alors définir $df : x \in \Omega \longmapsto df_x \in \mathcal{L}(E, E')$. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ si cette application est encore continue. Si $\mathcal{B} = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base de E', on peut écrire $f : x \in \Omega \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)e'_i$. f est alors différentiable ssi chaque f_i l'est. Dans ce cas $(df_i) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $df_{x_0}(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} (df_i)_{x_0}(h)e'_i$.

1.3 Propriétés

1. Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et $f : I \longrightarrow E'$. Si $x_0 \in I$, f est différentiable en x_0 ssi $f'(x_0)$ existe. Dans ce cas $df_{x_0} : h \longmapsto h \cdot f'(x_0)$.
2. Soit Ω un ouvert de E, $f, g : \Omega \longrightarrow E'$. Si df_{x_0} et dg_{x_0} existent pour $x_0 \in \Omega$ fixé, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $d(\lambda f + \mu g)_{x_0}$ existe et $d(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \lambda df_{x_0} + \mu dg_{x_0}$.
3. Soit $1 \leqslant i \leqslant m$, $f_i : \Omega \longrightarrow E_i$ ((E_i) une famille d'evnf, Ω ouvert de E) ; $\mathcal{B} : \prod\limits_{i=1}^{m} E_i \longrightarrow E'$ m−linéaire. Si les $(df_i)_{x_0}$ existent toutes en $x_0 \in \Omega$, $F : x \in \Omega \longmapsto \mathcal{B}(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ est différentiable en x_0 et
$$(dF)_{x_0} : h \longmapsto \mathcal{B}((df_1)_{x_0}(h), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0)) + \ldots + \mathcal{B}(f_1(x_0), \ldots, f_{n-1}(x_0), (df_n)_{x_0}(h)).$$
4. $f : \Omega \subset E \longrightarrow E'$, $g : \Omega' \subset E' \longrightarrow E''$ telle que $f(\Omega) \subset \Omega'$. Soit $x_0 \in \Omega$, si df_{x_0} existe et $dg_{f(x_0)}$ existe, alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et $d(g \circ f)_{x_0} = (dg)_{f(x_0)} \circ (df)_{x_0}$. (De même si f et g sont $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$).

1.4 Dérivées partielles

Soit un envf E rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow E'$ evnf. Si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on écrira $f(x_1, \ldots, x_n)$ pour désigner $f(x)$. Soit $X_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, on définit $\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)$ par la limite, si elle existe, de $\frac{f(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t}$ lorsque $t \longrightarrow 0$. C'est aussi $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(X_0+te_1)-f(X_0)}{t}$, ou encore $\varphi'(0)$ si φ est définie par $t \xrightarrow{\varphi} f(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)$. On définit de même les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Si df_{X_0} existe alors toutes les $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ existent et $\forall i$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = df_{X_0}(e_i)$. Si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont définies et continues en tout point de Ω, alors f est différentiable sur Ω ; plus précisément, $X \in \Omega \longmapsto df_X \in \mathcal{L}(E, E')$ est continue (c'est à dire f est $\mathcal{C}^1$). Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est une base de E', $df_X(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)\varepsilon_j$. On définit la *matrice jacobienne* de f au point X :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(df)_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Tous les résultats (combinaison linéaire, composition...) sont vrais pour f $\mathcal{C}^1$, ...

Composition : $f : \Omega \longrightarrow E'$, $g : \Omega' \longrightarrow E''$, $f(\Omega) \subset \Omega'$. Si Ω, Ω' sont des ouverts, E, E', E'' sont trois evnf rapportés aux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$, f et g différentiables sur Ω et Ω' respectivement, on note $J(f)_X$ et $J(g)_{X'}$ les matrices jacobienne de f resp. g aux points X resp. X'. Alors $J(g \circ f)_X = J(g)_{f(X)} \times J(f)_X$.

Règle de la chaîne : notons $f = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i e_i$, $g = \sum\limits_{j=1}^{q} g_i e'_i$, alors $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{q} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \times \frac{\partial g}{\partial y_j}(f_1(\ldots), \ldots, f_p(\ldots))$.

2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

2.1 Définitions

Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow E'$, $\mathcal{B}$ base de E. Dire que f est $\mathcal{D}^1$ (ou $\mathcal{C}^1$) ne dépend pas de $\mathcal{B}$. Les définitions suivantes sont encore indépendantes de $\mathcal{B}$. On dit que f est $\mathcal{C}^2$ sur Ω si toutes les $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ ont un sens et sont continues. De proche en proche, on peut définir les dérivées k−ièmes : $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\ldots(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}})\ldots))$, où $i_1, \ldots, i_k$ ne sont pas supposés distincts.

Théorème de Schwarz : soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow E'$, f supposée $\mathcal{C}^k$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ (permutations de $[1, k] \cap \mathbb{N}$), alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}}(\frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(2)}}}(\ldots(\frac{\partial f}{\partial x_{i_{\sigma(k)}}})\ldots)) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\ldots(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}})\ldots)).$$

2.2 Inégalité des accroissements finis

Soit $f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E'$ (Ω ouvert convexe). On suppose que $\exists M \geqslant 0 / \forall x \in \Omega$, $|||df_x||| \leqslant M$. Alors f est M−lipschitzienne. Réciproquement, soit $f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E'$, Ω ouvert quelconque. Si f est M−lipschitzienne, alors $|||df_x||| \leqslant M$ pour tout $x \in \Omega$.

Conséquence : soit Ω un ouvert convexe, $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E'$. f est constante ssi df est nulle en tout point.

2.3 Formule de Taylor-Young

Soit E un evnf, ω définie au voisinage de 0_E. On dit que ω est un $o(h^\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ donné) si elle est de la forme $\|h\|^\lambda \cdot \varepsilon(h)$ où $\varepsilon : E \longrightarrow E'$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^2} E'$, $X = (x_1, \ldots x_n) \in \Omega$. Si $h = (h_1, \ldots, h_n) \longrightarrow 0$,

$$f(X + h) = f(X) + \sum_i (\frac{\partial f}{\partial x_i}(X))h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X))h_i h_j + o(h^2)$$

2.4 Extrema locaux de fonctions scalaires

Soit E un evnf, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset E$ ouvert. f admet un ***maximum local*** en $x_0 \in \Omega$ s'il existe $\rho > 0$ tel que $B(x_0, \rho) \subset \Omega$ et $\forall x \in B(x_0, \rho)$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. Ce maximum local est *strict* si de plus $\forall x \in B(x_0, \rho)$, $f(x) = f(x_0) \Longrightarrow x = x_0$. On définit alors sans difficulté les notions de *minimum local*, *minimum local strict*. Un *extremum* est soit un minimum, soit un maximum.

CN : si f est $\mathcal{D}^1$ et admet un extremum local en $x_0 \in \Omega$, alors df_{x_0} est nulle : x_0 est un *point critique* de f.

Autre CN (hors programme) : $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$, $q_{x_0}(h) = \sum\limits_{i,j}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0))h_i h_j$ est une forme quadratique. Pour que f admette en $x_0 \in \Omega$ un maximum (resp. un minimum) local, il faut que $\mathrm{d}f_{x_0} = \underline{0}$ et que q_{x_0} soit une forme quadratique négative (resp. positive).

CS : $f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$, $\dim E = 2$. Soit $X_0 = (x_0, y_0)$ un point critique, on pose $r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(X_0)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0)$, $M = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

- Si $\det M < 0$, il n'y a pas d'extremum local en X_0
- Si $\det M > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum local en X_0
- Si $\det M > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum local en X_0

Autre CS, hors programme : $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$, Ω ouvert de E, E evnf quelconque. Soit $X_0 \in \Omega$ un point critique, $q = q_{X_0}$. Si q est définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. un maximum) local en X_0. S'il existe $h_1, h_2 \in E$ tels que $q(h_1) < 0$ et $q(h_2) > 0$, alors X_0 n'est pas un extremum local de f.

Interprétation géométrique : Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$, $\Sigma = \{M(x,y,z) \subset \mathbb{R}^3/[(x,y) \in \Omega] \wedge [z = f(x,y)]\}$. (x_0, y_0) est un point critique de f ssi le plan tangent à f en $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ est horizontal. Supposons de plus f $\mathcal{C}^2$ et (x_0, y_0) critique :

- Si $rt - s^2 > 0$, Σ est localement de la forme d'un paraboloïde de révolution et M_0 est dit *elliptique*.
- Si $rt - s^2 < 0$, M_0 est dit *hyperbolique*, ou *point-selle*, ou *col*. Σ a localement la forme d'une selle.

3 Théorèmes d'inversion

3.1 Remarques

Soit E, E' deux evnf, $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de E et $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^k} E'$ où $k \leqslant +\infty$. On dit que f est un $\mathcal{C}^k-$*difféomorphisme* de Ω sur $f(\Omega)$ si :

- $f(\Omega) = \Omega'$ est un ouvert de E'
- f est une bijection de Ω sur Ω'
- f^{-1} est encore $\mathcal{C}^k$

Propriété d'invariance du domaine : si un tel difféomorphisme existe, alors $\dim E = \dim E'$.

3.2 Théorème d'inversion locale

Soit E, E' deux evnf tels que $\dim E = \dim E'$; soit $f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} E'$ et $x \in \Omega$ tel que $\mathrm{d}f_x \in \mathcal{L}(E, E')$ soit inversible. Alors il existe un ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que $x \in \omega$ et $f|_\omega$ soit un $\mathcal{C}^k-$difféomorphisme de ω sur $f(\omega)$.

Conséquence : soit $f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} E'$; si $\mathrm{d}f_x$ est inversible en tout point $x \in \Omega$, alors $f(\Omega)$ est un ouvert de E'.

3.3 Théorème d'inversion globale

$f : \Omega \subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} E'$, on suppose f injective et $\mathrm{d}f_x$ inversible pour tout $x \in \Omega$. Alors $f(\Omega)$ est un ouvert de E' et f est un $\mathcal{C}^k -$ difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega) = \Omega'$. Remarque : dans le cas réel, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} \mathbb{R}$ telle que f' ne s'annule pas sur I, alors f est un $\mathcal{C}^k-$difféomorphisme de I sur $f(I)$.

3.4 Théorème des fonctions implicites $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} \mathbb{R}$; soit $X_0 = (x_0, y_0)$ tel que $f(X_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Il existe des intervalles ouverts I et J tels que $(x_0, y_0) \in I \times J \subset \Omega$ et une unique application $\varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} J$ telle que $[((x,y) \in I \times J) \wedge (f(x,y) = 0)] \Longleftrightarrow [y = \varphi(x)]$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, on a le même énoncé après échange des rôles de x et y.

Avec les notations précédentes, il existe un intervalle ouvert non vide $I' \subset I$ tel que $x_0 \in I'$ et $\forall x \in I'$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0$. Alors $\forall x \in I'$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$. Cela permet de calculer φ'.

Conséquence : soit Γ une courbe de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = 0$. Soit $(x_0, y_0) \in \Gamma$, alors Γ possède une tangente en (x_0, y_0) d'équation $(X - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (Y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

3.5 Théorème des fonctions implicites $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} \mathbb{R}$; soit $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ en lequel $f(X_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(X_0) \neq 0$. Alors il existe trois intervalles ouverts non vides I, J et K tels que $I \times J \times K \subset \Omega$ et il existe $\varphi : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^k} K$ telle que $\forall (x,y,z) \in I \times J \times K$, $(f(x,y,z) = 0) \Longleftrightarrow (z = \varphi(x,y))$.

3.6 Énoncé général des fonctions implicites $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} \mathbb{R}^p$ telle que $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(\ldots) \\ \vdots \\ f_p(\ldots) \end{pmatrix}$. Soit $(X^\circ, Y^\circ) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ tel que $f(X^\circ, Y^\circ) = 0$. $J_{X^\circ, Y^\circ}(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} & \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{array}\right) \in \mathfrak{M}_{p,n+p}(\mathbb{R})$ où la "jacobienne partielle par rapport à Y" est supposée inversible. Alors il existe $I_1, \ldots, I_n, J_1, \ldots, J_p$ intervalles ouverts tels que $(X^\circ, Y^\circ) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J_1 \times \ldots \times J_p \subset \Omega$ et $\varphi : I_1 \times \ldots \times I_n \longrightarrow J_1 \times \ldots \times J_p$ tels que $\forall (X,Y) \in I_1 \times \ldots \times J_p$, $f(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow Y = \varphi(X)$.

4 Formes différentielles de degré 1

4.1 Généralités

Soit E un evnf, et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ son dual. Si $\Omega \subset E$ est un ouvert, une *forme différentielle* de degré 1 sur Ω et de classe $\mathcal{C}^k$ est une application $\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^k} E^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E, $\mathcal{B}^* = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sa base duale. Une forme différentielle f $\mathcal{C}^k$ est donnée par : $x = \sum x_i e_i \longmapsto \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x_1, \ldots, x_n)\varepsilon_j$. $\varepsilon_j : x = \sum x_i e_i \longmapsto e_j$ est une forme linéaire donc $(\mathrm{d}\varepsilon_j)_x = \varepsilon_j$ en tout point. On peut donc noter $\sum\limits_j f_j(x_1, \ldots, x_n)(\mathrm{d}\varepsilon_j)_x$.

4.2 Formes fermées ou exactes

Ω un ouvert de E, $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} E^*$ une forme différentielle. On pose $f : x \longmapsto \sum f_i(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_i$. On dit que f est *fermée* si pour tous i, j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ en tout point. $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E^*$ est dite *exacte* (ou *totale*) s'il existe $\varphi : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^{k+1}} \mathbb{R}$ telle que $\forall i$, $f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. ($\varphi$ s'appelle le *potentiel scalaire* de f). Si Ω est connexe par arc, φ est unique à une constante additive près.

4.3 Théorème de Poincaré

Soit $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} E^*$.

- Pour que f soit exacte, il faut qu'elle soit fermée.
- Si Ω est étoilé, cette condition est suffisante.

Équations différentielles

$\alpha 17 - MP^*$

1 Généralités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathbb{R}^n$. φ est *solution* de l'*équation différentielle* $f(x, y, y') = 0$ si : $\forall x \in I$, $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ et $f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$. Si le degré est supérieur à 1, $ay'' + by' + cy + d = 0\,(1)$ équivaut à $\begin{cases} y' - z = 0 \\ az' + bz + cy + d = 0 \end{cases}$. L'équation se met donc sous la forme $f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} av' + bv + cu + d \\ u' - v \end{pmatrix}$.

1.1 Prolongement de solutions, solutions maximales

Soit $f(x, Y, Y')$ comme supra. Notons (I, φ) une solution $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On dit qu'une solution (I, φ) *se prolonge* en une solution (J, ψ) si $I \subset J$ et $\psi|_I = \varphi$. Une solution (I, φ) est dite *maximale* s'il n'existe pas de prolongement (J, ψ) tel que $I \subsetneq J$.

Propriété (hors programme) : toute solution (I, φ) d'une équation différentielle se prolonge en au moins une solution maximale.

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

On dit qu'une équation différentielle est *résolue en* y' si elle est de la forme $y' = f(x, y)$ où $f : \delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si $(x_0, Y_0) \in \delta$, une solution de l'équation différentielle "*avec problème de Cauchy*" $\begin{cases} Y' = f(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$ est une solution (I, Y) où $x_0 \in I$ et qui vérifie de plus $Y(x_0) = Y_0$.

Théorème d'Arzelà (hors programme) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} Y' = f(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$, alors il existe une solution maximale de ce problème, et toute solution maximale est définie sur un intervalle ouvert.

Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^n$.

1. Si $(x_0, Y_0) \in \Omega$, il existe un intervalle ouvert I_0 contenant x_0 tel que le problème $\begin{cases} Y' = f(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$ ait une solution et une seule φ_0 définie sur I_0.
2. Si $(x_0, Y_0) \in \Omega$, il existe une solution maximale et une seule (I, φ) de l'équation différentielle telle que $x_0 \in I$ et $\varphi(x_0) = Y_0$.
3. Le domaine de définition de toute solution maximale est un ouvert.
4. Toute solution de l'équation différentielle $Y' = f(x, Y)$ se prolonge de façon unique en une solution maximale.

1.3 Equations différentielles autonomes

Il s'agit d'équations différentielles de la forme $f(Y, Y') = 0$ dites *autonomes* ou *incomplètes en x*.

1.3.1 Premier résultat

Soit une équation différentielle résolue en Y' : $Y' = f(Y)$ où $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^n$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution telle que $\exists t_0 \in I / \varphi'(t_0) = 0$. Alors φ est constante.

1.3.2 Invariance par translation

Soit $(E_0) \begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ et $(E_1) \begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_1) = y_0 \end{cases}$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^n$, $(E) : y' = f(y)$ une équation différentielle. Soit $\varphi : I \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathbb{R}^n$ une solution maximale. Si il existe t_0 et t_1 des éléments de I comme dans E_0 et E_1 et $t_0 < t_1$, alors $I = \mathbb{R}$ et $(t_1 - t_0)$ est une période de φ.

1.4 Équations différentielles scalaires d'ordre 1 classiques

1.4.1 Équations à variables séparables

Ce sont les équations différentielles de la forme $y = a(y)b(x)$ où $a : I_a \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$ et $b : I_b \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$, I_a et I_b des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $y' = f(x, y)$ une équation différentielle où $f : I_a \times I_b \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = b(x)a(y)$. Si on donne $(x_0, y_0) \in I_a \times I_b$, il existe $h > 0$ tel que $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admette une unique solution $]x_0 - h, x_0 + h[\longrightarrow \mathbb{R}$. Les solutions constantes sont celles telles que $\forall x$, $b(x)a(\lambda) = 0$. Les autres s'obtiennent grâce au calcul formel.

1.4.2 Équations scalaires homogènes

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I un intervalle ouvert). C'est une équation de la forme $y' = f(\frac{y}{x})$. On procède au changement de variables $t = \frac{y}{x}$ pour résoudre l'équation.

1.4.3 Équations linéaires scalaires d'ordre 1

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $a, b, c : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ telles que a ne s'annule en aucun point de I. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'énonce ainsi :

1. Les solutions maximales de $\mathcal{E}$ sont définies sur I entier. Cet ensemble de solutions forme une droite affine incluse dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$. La direction de cette droite est le sev de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ formé des solutions maximales de $(\mathcal{E}_0) : a(x)y' + b(x)y = 0$.
2. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}$, il existe une unique solution maximale de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ avec le problème de Cauchy $y(x_0) = y_0$. En particulier, toute solution définie sur un sous-intervalle non vide $J \subset I$ se prolonge de façon unique en une solution maximale.
3. On obtient toutes les solutions maximales de $\mathcal{E}$ par la méthode formelle habituelle.

1.4.4 Équation différentielle scalaire aux différentielles exactes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $a, b : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$, $(\mathcal{E}) : a(x, y) + b(x, y)y' = 0$. Si la forme différentielle $a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y$ est exacte (c'est à dire de la forme $\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y$, où $F : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$), alors pour toute solution $\varphi : I \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathbb{R}$ de $\mathcal{E}$, l'application $x \longmapsto F(x, \varphi(x))$ est constante. Les solutions de $\mathcal{E}$ sont donc les fonctions $x \in I \longmapsto \varphi(x)$ définies implicitement par les équations $F(x, y) = \lambda$. On n'a ici qu'un résultat local.

2 Équations et systèmes linéaires

2.1 Forme générale et théorème de structure

Forme matricielle : I un intervalle de $\mathbb{R}$, $M : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $A : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}^n$. Soit $(\mathcal{E})$: $X' = MX + A$. Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction $\mathcal{D}^1$ (mais nécéssairement $\mathcal{C}^1$) $J \subset I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}^n$ telle que $\forall t \in J$, $\varphi'(t) = M(t)\varphi(t) + A(t)$.

Forme générale : E un $\mathbb{K}-$evnf, I un intervalle, $u : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathcal{L}(E)$, $v : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E$ et $(\mathcal{E})$: $y' = (u(t))(y) + v(t)$, $\dim E = n$.

1. Les solutions maximales de $(\mathcal{E})$ sont définies sur I tout entier. L'ensemble (S) qu'elles forment est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de dimension n. Si $v = \underline{0}$, on note (S_0) à la place de (S). C'est un sev de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, E)$. Dans le cas général, si $\varphi_0 \in (S)$, alors $(S) = \varphi_0 + (S_0)$.
2. Si $(t_0, y_0) \in I \times E$, il existe une unique solution maximale de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$.
3. Toute solution de $(\mathcal{E})$ se prolonge de façon unique en une solution maximale de $(\mathcal{E})$.

2.2 Systèmes linéaires homogènes

Ecriture matricielle : $M : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (I un intervalle de $\mathbb{R}$), $(\mathcal{E}_0)$: $Y' = M(t)Y$.

Ecriture linéaire : $u : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$, $Y' = u(t)(Y)$.

Les solutions maximales sont définies sur I entier ; si $t_0 \in I$, $Y_0 \in E$, il existe une unique solution maximale telle que $\varphi_{Y_0}(t_0) = Y_0$. L'ensmble des solutions maximales est un sev de $\mathcal{C}^1(I, E)$. Pour $t \in I$ fixé, l'application $\delta_{t_0} : E \longrightarrow S_0$ telle que $\delta_{t_0}(Y_0) = \varphi_{Y_0}$ est un isomorphisme.

Corollaire : Soit $\mathcal{F} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ une famille de S_0, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une base de S_0
2. $\exists t_0 \in I / (\phi_1(t_0), \ldots, \phi_n(t_0))$ est une base de E
3. $\forall t \in I$, $(\phi(t), \ldots, \phi_n(t))$ est une base de E

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ une famille dans S_0. On définit le *wronskien* de la famille $\mathcal{F}$: $\forall t \in I$, $\mathcal{W}(t) = \det_{\mathcal{B}}(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$.

- Si $\mathcal{F}$ est une base de S_0, alors $\forall t \in I$, $\mathcal{W}(t) \neq 0$.
- Si $\mathcal{F}$ est liée, alors $\forall t \in I$, $\mathcal{W}(t) = 0$.

$\mathcal{W}$ est en outre $\mathcal{C}^1$ et solution de l'équation différentielle $w' = \operatorname{tr}(u(t))w$. Une base de S_0 s'appelle un *système fondamental de solutions* de $(\mathcal{E}_0)$.

2.3 Résolution d'un système complet

Forme matricielle : $M : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $A : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}^n$, $(\mathcal{E}) : Y' = M(t)Y + A(t)$. Supposons connu un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_0$: $(Y_1, \ldots, Y_n)$. La solution générale de S_0 est alors $\sum \lambda_i Y_i = (Y_1, \ldots, Y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Posons $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, $R = (Y_1, \ldots, Y_n)$. Pour résoudre le système complet, posons $Y(t) = R(t)\Lambda(t)$ où Λ est une fonction $\mathcal{C}^1$ inconnue. On a alors $\Lambda' = R^{-1}A$; Λ s'obtient par primitivation.

Forme linéaire : $\mathcal{F} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_0$; la solution générale de S_0 est $\sum \lambda_i \varphi_i$. On peut toujours se ramener à la forme matricielle.

2.4 Cas d'un système à coefficients constants

Forme matricielle : $A : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}^n$, $(\mathcal{E}) : Y' = MY + A(t)$, $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ constante. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$ avec le problème de Cauchy $Y(t_0) = Y_0$. La solution maximale est $t \in I \longmapsto \exp((t - t_0)M)Y_0$. On obtient un système fondamental en choisissant $t_0 \in I$ et en prenant $\varphi_i : t \longmapsto \exp((t - t_0)M)Y_i$ où $Y_1, \ldots, Y_n$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Pour le système complet, on fait varier les constantes dans $Y = \exp((t - t_0)M)\Lambda$ où Λ est l'inconnue.

Forme linéaire : $y'(t) = u(y(t)) + v(t)$ où $u \in \mathcal{L}(E)$ constante. La solution maximale à $y' = u(y)$ avec $y(t_0) = y_0$ est $\exp((t - t_0)u)(y_0)$. On a un système fondamental de solutions en remplaçant successivement y_0 par $y_1 \ldots y_n$ d'une base de E. On obtient un système complet en posant $y = \exp((t - t_0)u)(\vec{\lambda}(t))$ où $\vec{\lambda} : I \longrightarrow E$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ inconnue. Puis variation de la constante...

3 Équations scalaires d'ordre 2

3.1 Retour sur les généralités

$y'' = f(x, y, y')$ où $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert. On se ramène au théorème de Cauchy-Lipschitz en posant $y' = z$ comme au paragraphe 1. Un problème de Cauchy dans (S) est de la forme $\begin{cases} (S) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$ où $(x_0, y_0) \in \Omega$. Pour $(\mathcal{E})$, cela revient à $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$. On a le théorème de Cauchy-Lipschitz : soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^3$, et $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Il existe alors un intervalle ouvert I contenant x_0, tel que le problème $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$ associé à l'équation différentielle $y'' = f(x, y, y')$ admette une unique solution sur I. Toute solution s'étend de manière unique en une solution maximale, les domaines de définition des solutions maximales sont des ouverts. Deux solutions maximales (I, φ) et (J, ψ) sont égales ssi il existe $x_0 \in I \bigcap J$ tel que $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ et $\varphi'(x_0) = \psi'(x_0)$.

3.2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) & (E) \\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 & (E_0) \end{cases}$$

où $a, b, c, d : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ (I un intervalle quelconque) et a ne s'annulle pas sur I. Alors :

1. Les solutions maximales de (E) sont définies sur I tout entier.
2. Si $(x_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{C}^2$, il existe une unique solution maximale $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y_0'$.
3. Toute solution de (E) définie sur un intervalle non vide se prolonge de manière unique en une solution maximale.
4. L'ensemble (S) (resp. (S_0)) des solutions de (E) (resp. (E_0)) est un sous-espace affine (resp. sev) de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{C})$.

3.3 Isomorphismes

Avec les mêmes notations, (S_0) est un plan vectoriel. Si $t_0 \in I$ fixé, l'application $\delta_{t_0} : S_0 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ telle que $\delta_{t_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'ev. Si φ_1, φ_2 sont deux solutions maximales de (E_0), on pose $\mathcal{W} : x \in I \longrightarrow \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$; c'est le wronskien de la famille (φ_1, φ_2). $\mathcal{W}$ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\mathcal{W}' = -\frac{b}{a}\mathcal{W}$.

3.4 Méthodes de résolution

3.4.1 Si l'on connaît $\varphi \in S_0$ ne s'annulant pas sur I

Soit $(E) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, $\varphi \in S_0$. On procède au changement de fonction $y = z\varphi$ (z est $\mathcal{C}^2$ car φ ne s'annulle pas). On calcule y, y', y'' et par combinaison linéaire on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en $Z = z'$. On la résout et on primitive Z pour obtenir z. On peut chercher des séries entières solution.

3.4.2 Si l'on connaît un système fondamental de solutions

Soit (φ_1, φ_2) une base de (S_0). Dans (E), on effectue le changement de fonction inconnue $y = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$, où λ_1 et λ_2 sont les nouvelles fonctions inconnues. On calcule y, y' et on impose $\lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2'\varphi_2 = 0$; puis on calcule y'', puis par combinaison linéaire on se ramène à un système linéaire de deux équations à deux inconnues en λ_1' et λ_2', que l'on résout par exemple grâce aux formules de Cramer. On primitive ensuite λ_1' et λ_2'.

3.4.3 Équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(E) : ay'' + by' + cy = d$ où $a \neq 0, b, c$ sont des constantes, et $d : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$. La solution de (E_0) est

- $x \longmapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ si le polynôme caractéristique $R(X) = aX^2 + bX + c$ a deux zéros r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$
- ou $x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$ si R admet une racine double dans $\mathbb{C}$.

On a donc un système fondamental de solutions, et on peut résoudre l'équation complète par variation des constantes.

Si d est de la forme $x \in I \longmapsto \sum \lambda_i e^{m_i x} P_i(x)$, où $(m_i, \lambda_i) \in \mathbb{C}^2$ et $P_i \in \mathbb{C}[X]$ pour tout i, la méthode qui suit ne demande jamais plus de calculs :

1. Pour chaque i, chercher une solution particulière de $ay'' + by' + cy = e^{m_i x} P_i(x)$ notée φ_i.
2. $\varphi = \sum \lambda_i \varphi_i$ est une solution de E.
3. La solution générale de E est $\varphi + S_0$ où S_0 est l'ensemble des solutions de E_0.

On cherche une solution particulière à l'équation $ay'' + by' + cy = e^{mx} + P(x)$ sous la forme $\varphi = x^\mu e^{mx} Q(x)$ où :

- $Q \in \mathbb{C}[X]$ a même degré que P
- $\mu = 0$ si $am^2 + bm + c \neq 0$
- $\mu = 1$ si m est un zéro simple de $R(X) = aX^2 + bX + c$
- $\mu = 2$ si m est un zéro double de R

Intégrales doubles

$\alpha 20 - MP^*$

1 Notion d'intégrale double sur un produit d'intervalles

1.1 Formule de Fubini

Soit $f : [a,b] \times [c,d] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, alors :

1. $\forall x \in [a,b], \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ a un sens
2. $x \longmapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$
3. $\forall y \in [c,d], \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ a un sens
4. $y \longmapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[c,d]$
5. $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

1.2 Intégrabilité d'une fonction positive

Soient I, J deux intervalles de longueur non vide, $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}^+$. f est *intégrable* si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout couple de segments $(I_0 \subset I, J_0 \subset J)$, on a :

$$\int\int_{I_0 \times J_0} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant M$$

Dans ce cas, $\int\int_{I\times J} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \sup \int\int_{I_0\times J_0} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. soit I_n une suite croissante exhaustive de segments (SCES) de I, J_n une SCES de J, alors $n \longmapsto \int\int_{I_n \times J_n} f$ croît ; si cette suite est majorée, f est intégrable et $\int\int_{I\times J} f = \lim \int\int_{I_n\times J_n} f$.

Propriété : Soit $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}^+$. On suppose que :

1. $\forall x \in I, y \in J \xmapsto{\mathcal{C}^0} f(x,y)$ est intégrable
2. $F : x \in I \longmapsto \int_J f(x,y)\mathrm{d}y$ est $\mathcal{C}^0_m$

Alors f est intégrable sur $I \times J$ ssi F l'est sur I et, le cas échéant, $\int\int_{I\times J} f = \int_I F$.

1.3 Cas général

$f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$; f est *intégrable* si $|f|$ l'est.

Si $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$ est intégrable, alors f^+ et f^- le sont et : $\int\int_{I\times J} f = \int\int_{I\times J} f^+ - \int\int_{I\times J} f^-$.

Si $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ est intégrable, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et : $\int\int_{I\times J} f = \int\int_{I\times J} \mathrm{Re}(f) + i\int\int_{I\times J} \mathrm{Im}(f)$.

Propriété : Soit $f : I \times J \xmapsto{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ intégrable. On suppose que :

1. $\forall x \in I, y \in J \xmapsto{\mathcal{C}^0} f(x,y)$ est intégrable
2. $F : x \in I \longmapsto \int_J f(x,y)\mathrm{d}y$ est $\mathcal{C}^0_m$

Alors f est intégrable sur $I \times J$ ssi F l'est sur I et, le cas échéant, $\int\int_{I\times J} f = \int_I F$.

1.4 Propriétés de l'intégrale double

1. **Linéarité** : ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) l'ensemble des fonctions $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}$ intégrables est un sev de $\mathcal{C}^0(I \times J, \mathbb{K})$. Sur ce sev, $f \longmapsto \int\int_{I\times J} f$ est linéaire.
2. **Inégalité triangulaire** : Soit $f : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}$, alors : $|\int\int f| \leqslant \int\int |f|$.
3. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : Soit $f, g : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}$. Si f^2 et g^2 sont intégrables, alors fg est intégrable et $\int\int |fg| \leqslant \sqrt{\int\int |f|^2 \int\int |g|^2}$
4. **Majorations** : $f, g : I \times J \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{K}$. Si $\exists M / \forall (x,y) \in I \times J$, $|f(x,y)| \leqslant M|g(x,y)|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f et, si g est intégrable, on a : $\int\int |f| \leqslant M \int\int |g|$.

2 Intégrales doubles sur des compacts élémentaires

2.1 Définitions

On appelle *compact élémentaire* (CE) de $\mathbb{R}^2$ une partie de $\mathbb{R}^2$ définie de deux façons par un système d'inéquations :

$$a \leqslant x \leqslant b$$
$$\forall x \in [a,b], \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$$

et :

$$c \leqslant y \leqslant d$$
$$\forall y \in [c,d], \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

où les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont continues sur leur intervalle de définition.

2.2 Propriétés

Soit C un CE de $\mathbb{R}^2$, et $f : C \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, alors :

$$\int_a^b (\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \int_c^d (\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$$

La valeur de ces deux termes est par définition : $\int\int_C f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2.3 Cas d'une réunion de compacts élémentaires

$C \subset \mathbb{R}^2$ est un *compact usuel* (CU) si on peut l'écrire $C = \bigcup_{k=1}^n C_k$ où les $(C_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont des CE vérifiant $\forall i \neq j$, $\mathring{C}_i \bigcap \mathring{C}_j = \varnothing$.

Dans ce cas, on a : $\int\int_C f = \sum_{k=1}^n \int\int_{C_i} f$.

2.4 Changement de variables

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ un $\mathcal{C}^1$ − difféomorphisme, $C \subset \Omega$ un CU. On suppose que $\varphi(C) = C'$ est encore un CU. Soit $f : C' \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$. Alors :

$$\int\int_{C'} f = \int\int_C f \circ \varphi \times |\det J\varphi|$$

3 Passage en coordonnées polaires

3.1 Cas d'un produit d'intervalles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$; on pose $g : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ telle que $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors f est intégrable ssi g l'est, et dans ce cas

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} g(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

3.2 Cas d'un compact usuel

Soit C un CU inclus dans $\mathbb{R}^+ \times [\alpha, \alpha + 2\pi]$, on suppose que $C' = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/(r,\theta) \in C\}$ est un CU de $\mathbb{R}^2$. Si $f : C' \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors :

$$\int\int_{C'} f = \int\int_{C} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta.$$

4 Notion d'aire

4.1 Aire d'un compact usuel

L'*aire* d'un CU C est par définition $\int\int_C 1 \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4.2 Aires gauches

Soit E un espace affine euclidien orienté (de dimension 3). Soit une surface S de classe $\mathcal{C}^{k\geqslant 1}$, définie par $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow E$. Si C est un CU inclus dans Ω, on définit l'aire de $\varphi(C)$ comme :

$$\int\int_C \|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v}\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$