Suites et séries de fonctions

$\alpha 9 - MP^*$

1 Suites de fonctions

1.1 Convergence simple

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions de E dans $\mathbb{C}$: on dit que (f_n) *converge simplement* vers $f \in \mathbb{C}^E$ si $\forall x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, c'est à dire $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. n_0 dépend de ε et de x. (f_n) converge simplement ssi $(f_n(x))$ vérifie le critère de Cauchy pour tout x : $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0/\forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant 1, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

1.2 Convergence uniforme

$(f_n) \in (\mathbb{C}^E)^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathbb{C}^E$, (f_n) *converge uniformément* vers f si $\sup\limits_{x\in E}|f(x) - f_n(x)| \longrightarrow 0$. Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée, on appelle norme-infini et on note $\|\varphi\|_\infty$ la quantité $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{x\in E}|\varphi(x)|$.

- Si (f_n) converge uniformément vers f et g alors $f = g$
- Si (f_n) converge uniformément vers f alors (f_n) converge simplement vers f

(f_n) converge uniformément vers f ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall x \in E, \forall n \geqslant n_0, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

(f_n) converge uniformément ssi f vérifie le *critère de Cauchy de convergence uniforme* : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0/\forall x \in E$, $\forall n \geqslant n_0$, $\forall p \geqslant 0$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

(f_n) converge uniformément vers f ssi $\exists (a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}/ \ \forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

1.3 Convergence uniforme et continuité

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que (f_n) converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$
   (a) Si toutes les f_n sont $\mathcal{C}^0$ (respectivement à gauche, à droite) en un point $x_0 \in A$, il en est de même pour f en ce point.
   (b) Si toutes les f_n sont $\mathcal{C}^0$ sur A alors il en est de même pour f.
2. $A \subset E$ où E est un espace métrique, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que (f_n) converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Si toutes les f_n sont continues en $x_0 \in A$, alors f l'est aussi. Si toutes les f_n sont continues sur A alors f l'est aussi.
3. $I = (a, b[\subset \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Hypothèses : $f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que (f_n) converge uniformément vers f ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists l_n = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} f_n(x)$ finie. Alors :
   (a) l_n admet une limite l finie
   (b) $l = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} f(x)$
4. Version topologique : $A \subset E$ où E est un espace métrique, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que (f_n) converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit $a \in \overline{A}\backslash A$, on suppose que $\forall n$, $\exists l_n = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f_n(x)$. Alors (l_n) admet une limite l et $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$.
5. I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I, alors f est encore continue sur I.

1.4 Convergence uniforme et intégration

1. Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$. Si (f_n) converge uniformément vers f, alors
   (a) $\int_I |f - f_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   (b) $\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f$
2. Si I est un intervalle borné non fermé de $\mathbb{R}$, ces résultats restent vrais à condition que les f_n et f soient intégrables
3. Théorème de primitivation : I intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in I$ fixé. Si (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors :
   (a) $F_n : x \in I \longmapsto \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$ converge simplement vers $F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
   (b) (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment inclus dans I.

1.5 Théorème de dérivation

I intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{C}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Hypothèses :

1. (f_n) converge simplement vers f
2. (f_n') converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction g

Alors :

1. g est $\mathcal{C}^0$
2. f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$
3. (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I.

Classe $\mathcal{C}^k$: I intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^{k\geqslant 1}} \mathbb{C}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Hypothèses :

1. (f_n), (f_n'), ..., $(f_n^{(k-1)})$ convergent simplement sur I et la limite simple de (f_n) est f.
2. $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction g.

Alors f est $\mathcal{C}^k$, $f^{(k)} = g$ et $(f_n^{(l)})$ converge uniformément vers $f^{(l)}$ sur tout segment inclus dans I pour tout $0 \leqslant l \leqslant k$.

2 Séries de fonctions

2.1 Nature de la convergence

Soit E un ensemble, $A \subset E$, $\{u_n\}$ une série de fonctions $A \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit qu'elle *converge simplement* sur A si pour tout $x \in A$, $\{u_n(x)\}$ est convergente. Dans ce cas, la fonction-somme $S : x \in A \longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est bien définie. Dans ce cas, la suite de fonctions $S_n : x \in A \longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$ converge simplement vers S et la suite de fonctions $R_n : x \in A \longrightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ converge simplement vers $\underline{0}$.

Critère de Cauchy de convergence simple : $\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0/\forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant 1, |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon$.

On dit que $\{u_n\}$ *converge uniformément* sur A si (S_n) converge uniformément vers S. Cela revient à dire que (R_n) converge uniformément vers $\underline{0}$.

Critère de Cauchy de convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0/\forall x \in A, \forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant 1, |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon$.

On dit que $\{u_n\}$ *converge normalement* sur A lorsque la série numérique $\{\|u_n\|_\infty\}$ converge. Avec ces notations,

1. Si $\{u_n\}$ converge normalement sur A, $\forall x \in A$, $\{u_n(x)\}$ est absolument convergente
2. Si $\{u_n\}$ converge normalement sur A, alors $\{u_n\}$ converge uniformément sur A

Caractérisation de la convergence normale : $\{u_n\}$ converge normalement ssi il existe une série numérique $\{\alpha_n\}$ convergente telle que $\forall x \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \leqslant \alpha_n$.

2.2 Continuité de la fonction-somme

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, $u_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\{u_n\}$ converge uniformément sur A, S sa fonction-somme
   (a) Si toutes les u_n sont $\mathcal{C}^0$ (respectivement à gauche, à droite) en un point $x_0 \in A$, il en est de même pour S en ce point.
   (b) Si toutes le u_n sont $\mathcal{C}^0$ sur A alors il en est de même pour S.
2. $A \subset E$ où E est un espace métrique, $u_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\{u_n\}$ converge uniformément. Si toutes les u_n sont continues en $x_0 \in A$, alors S l'est aussi. Si toutes les u_n sont continues sur A alors S l'est aussi.
3. $I = (a, b[\subset \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Hypothèses : $u_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $\{u_n\}$ converge uniformément, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists l_n = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} u_n(x)$ finie. Alors :

(a) $\exists l = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} S(x)$

(b) $\{l_n\}$ converge, et $l = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} l_n$.

2.3 Intégration des sommes de séries

$I = [a, b]$, $\{u_n\}$ série de fonctions $I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$. Hypothèses : $\{u_n\}$ converge uniformément sur I et $S : x \in I \overset{\mathcal{C}^0_m}{\longmapsto} \sum u_n(x)$. Alors :

1. La série numérique de terme général $v_n = \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t$ converge
2. $\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$, c'est à dire $\int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t$.

Ces résultats restent valables si I est un intervalle borné non fermé de $\mathbb{R}$, a condition que les u_n et u soient intégrables sur I.

2.4 Primitivation

I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, telle que $\{u_n\}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I. Soit S la fonction-somme associée à $\{u_n\}$. Alors :

1. S est $\mathcal{C}^0$
2. Si $a \in I$, $\int_a^x S(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$
3. Il y a convergence uniforme sur tout segment de la série $\{\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t\}$

2.5 Dérivation

I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u_n : I \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{C}$ une série de fonctions. Si $\{u_n\}$ converge simplement sur I et $\{u'_n\}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors S est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in I$, $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$. En outre, $\{u_n\}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Avec les mêmes notations, si les u_n sont $\mathcal{C}^{k \geqslant 1}$ sur I, si $\{u_n\}$, $\{u'_n\}$, ..., $\{u_n^{(k-1)}\}$ convergent simplement sur I et $\{u_n^{(k)}\}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors S est $\mathcal{C}^k$ et $\forall 0 \leqslant \underline{l} \leqslant k$, $S^{(l)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^{(l)}$. En outre, il y a convergence uniforme sur tout segment des séries $\{u_n^{(l)}\}$.

3 Étude des séries entières

$\{a_n x^n\}$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. On s'intéresse à la nature de la convergence.

1. Dans le cas réel, il y a convergence uniforme de la série $\{a_n x^n\}$ sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.
2. Dans le cas complexe, il y a convergence uniforme sur tout disque fermé $\mathrm{D}'(0, r)$ où $r < R$.

Dans les deux cas, il y a même convergence normale sur les ensembles condidérés.

4 Théorèmes de densité

4.1 Généralités

Normes : voir $\alpha 13$ espaces métriques

Comparaison entre normes : I un segment de $\mathbb{R}$, E l'ensemble des fonctions $I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$, E_m l'ensemble des fonctions $I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$. On définit pour tout $f \in E_m$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2} \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$$

On a de plus : $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2$

Soit $\| \bullet \|$ une norme, F sev de E_m, $\mathcal{P}$ une partie de F. On dit que $\mathcal{P}$ est *dense* dans F au sens de $\| \|$ si $\forall f \in F$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in \mathcal{P} / \|f - g\| \leqslant \varepsilon$ (c'est à dire $F \subset \overline{\mathcal{P}}$).

4.2 Fonctions en escalier

$\mathcal{E}_I$ l'ensemble des fonctions en escalier $I \longrightarrow \mathbb{C}$. $\mathcal{E}_I$ est dense dans E_m au sens de $\| \|_\infty$ (a fortiori de $\| \|_1$ et $\| \|_2$)

Lemme de Lebesgue (hors programme) : $f : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} \mathbb{C}$, pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{I} = \int_a^b f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t$; alors $\mathcal{I} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

4.3 Densité des fonctions affines par morceau

$I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est ***affine par morceaux*** si elle est $\mathcal{C}^0$ et s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de I telle que $\varphi|_{[x_i, x_{i+1}]}$ soit affine pour tout i.

Le sous-espace vectoriel des applications $I \longrightarrow \mathbb{C}$ affines par morceaux est dense dans le sev $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ au sens de $\| \|_\infty$.

4.4 Théorème polynomial de Weierstrass

I un segment de $\mathbb{R}$, le sev des fonctions polynômiales de I dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ au sens de $\| \|_\infty$.

4.5 Densité des fonctions polynômiales trigonométriques

(théorème de Weierstrass trigonométrique)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est un ***polynôme trigonométrique*** si elle est de la forme $f(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} C_k e^{ikx}$.

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$ $2\pi-$périodiques. Le sev des fonctions polynômiales trigonométriques est dense dans E.