Fonctions de plusieurs variables réelles

\[ a \in \mathbb{R}^n \]

Soit \( E, E' \) deux \( \mathbb{R} \)-enf, on considère les fonctions \( f : A \subseteq E \rightarrow E' \).

1 Classe d’une fonction

1.1 Notion de limite en un point

\[ f : A \subset E \rightarrow E' ; \text{ soit } x \in A, \text{ on dit que } l = \lim_{y \rightarrow x} f(y) \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0/\forall y \in A \setminus \{x\}, \|y-x\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - l\| < \varepsilon. \]

Si cette limite existe, elle est unique. \( l = \lim_{y \rightarrow x} f(y) \text{ pour toute suite } (y_n) \subset A \setminus \{x\}, \lim y_n = x, \text{ alors } \lim_{y \rightarrow x} f(y_n) = l \).

1.2 Différentiabilité d’une application

\[ \Omega \text{ un ouvert de } E, f : \Omega \rightarrow E' ; f \text{ est différentiable en } x_0 \in \Omega \text{ si elle existe } l \in \mathcal{L}(E, E') \text{ telle que } f(x_0+h) = f(x_0)+lh+\mathcal{O}(h) \text{ avec } \mathcal{O}(h) = o(h), l \text{ est alors unique : c’est la différentielle de } f \text{ en } x_0, \text{ ou application linéaire tangente à } f \text{ en } x_0. \]

- Si \( f \) est différentiable en \( x_0 \), alors \( f \) est continue en \( x_0 \).
- Si \( E \) et \( E' \) ne sont pas de dimension finie, on impose de plus \( l \in \mathcal{L}(E, E') \).
- \( \forall h, \lim f(x_0, h) = \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0(t), x_0(t)) \) s’appelle aussi dérivée de \( f \) selon le vecteur \( h \).

On dit que \( f \) est différentiable sur \( \Omega \) si elle l’est en tout point de \( \Omega \). On peut alors définir \( df : x \in \Omega \rightarrow df(x) \in \mathcal{L}(E, E') \). On dit que \( f \) est \( C^1 \) si cette application est encore continue.

2 Dérivées partielles d’ordre supérieur

2.1 Définitions

Soit \( f : \Omega \subset E \rightarrow E', \text{ base de } E, \text{ Dire que } f \text{ est } D^k \text{ (ou } C^k \text{) ne dépend pas de } B. \text{ Les définitions suivantes sont encore indépendantes de } B. \text{ On dit que } f \text{ est } C^k \text{ sur } \Omega \text{ si toutes les } \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} \text{ ont un sens et sont continues. De proche en proche, on peut définir les dérivées } k-\text{jusques à } \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}, \text{ où } 0 \leq i_1, \ldots, i_n \leq k \text{ et } i_1 + \cdots + i_n = k, \text{ on ne pose pas toujours distincts.}

Théorème de Schwarz : soit \( f : \Omega \subset E \rightarrow E', \text{ supposée } C^k, \text{ Si } \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ (permutations de } [1, n] \cap \mathbb{N}) \text{, alors :}

\[ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial^{k}}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial^{k}}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial^{k}}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial^{k}}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \]

2.2 Inégalités des accroissements finis

Soit \( f : \Omega \subset E \rightarrow E', \text{ (ou } \Omega \text{ ouvert convexe, }) \text{ On suppose que } \exists M > 0/\forall x \in \Omega, \|df(x)\|_M \leq M. \text{ Alors } f \text{ est } M-\text{lip-schitzien.}

Réciproquement, soit \( f : \Omega \subset E \rightarrow E', \Omega \text{ ouvert quelconque. Si } f \text{ est } M-\text{lip-schitzien, alors } \|df(x)\|_M \leq M \text{ pour tout } x \in \Omega \).

Conséquence : soit \( \Omega \) un ouvert convexe, \( f : \Omega \rightarrow E' \), \( f \) est continue son \( df \) est nulle en tout point.

2.3 Formule de Taylor-Youngh

Soit \( E \text{ un eucl. } \omega \text{ définie au voisinage de } 0. \text{ On dit que } \omega \text{ est \text{ o}(h^k) (A \in \mathbb{R}^n \text{ donné) si elle est de la forme } \|h\|^k \cdot \omega(h) \text{ où } k \in \mathbb{N} \text{ et } \omega(h) \text{ est } o(\|h\|^k) \text{ à } h \neq 0. \text{ Si } f : \Omega \subset E \rightarrow E', \text{ base de } E, \text{ alors :}

\[ f(x) = f(X) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)h_i + \frac{1}{2!} \sum \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)h_i h_j + o(h^2). \]

2.4 Extrema locaux de fonctions scalaires

Soit \( E \text{ un eucl. } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset E \text{ ouvert. } f \text{ admet un maximum local en } x_0 \in \Omega \text{ s’il existe } r > 0 \text{ tel que } B(x_0, r) \subset \Omega \text{ et } f(x) \leq f(x_0) \text{ pour tout } x \in B(x_0, r). \text{ Ce maximum local est strict si } f \text{ est de classe } C^1 \text{ et } f(x_0) > f(x) \text{ pour tout } x \in B(x_0, r). \text{ On définit alors sans difficulté les notions de minimum local, minimum local strict. Un extremum est soit un minimum, soit un maximum } \mathbb{C}_N \text{ si } f \text{ est } C^2 \text{ et admet un extremum local en } x_0 \in \Omega \text{ alors } df_{x_0} \text{ est nulle : } x_0 \text{ est un point critique de } f. \]
Autre CN (hors programme) : \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}, q_{x_0}(h) = \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)h_ih_i \) est une forme quadratique. Pour que \( f \) admette
\[ M = \left[ \begin{array}{cccc} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \\ \\ \end{array} \right]. \]
- Si \( d < M \), il n'y a pas d'extremum local en \( x_0 \)
- Si \( d > M > 0 \) et \( r > t \), \( f \) admet un minimum local en \( x_0 \)
- Si \( d > M > 0 \) et \( r < t \), \( f \) admet un maximum local en \( x_0 \)

Autre CN, hors programme : \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R} \) ouvert de \( E, E \) en un quelconque. Soit \( x_0 \in \Omega \) un point critique, \( q = q_{x_0} \). Si \( q \) est définie positive (resp. définie négative), \( f \) admet un minimum (resp. un maximum) local en \( x_0 \). Si \( q(h_0) < 0 \) et \( g(h_0) > 0 \), alors \( x_0 \) n'est pas un extremum local de \( f \).

Interprétation géométrique : Soit \( f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \), \( \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \in \Omega \land \chi = f(x, y)\} \). \( (x_0, y_0) \) est un point critique de \( f \) si le plan tangent à \( f \) en \( (x_0, y_0) \) est horizontal. Supposons alors que \( f \) est \( \mathbb{R}^2 \) et \( (x_0, y_0) \) critique :
- Si \( r - s > 0 \), \( \Sigma \) est localement de la forme d'un paraboloide de révolution et \( M_0 \) est dit elliptique
- Si \( r - s < 0 \), \( \Sigma \) est hiperbolique, ou point-selle, ou col. \( \Sigma \) a localement la forme d'une selle.

3 Théorèmes d'inversion

3.1 Remarques

Soit \( E, E' \) deux ensembles de \( E' \) et \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d \) où \( k + 1 \). On dit que \( f \) est un \( C^k \)-difféomorphisme de \( \Omega \) sur \( \Omega' \) si :
- \( f(\Omega) = \Omega' \) est un ouvert de \( E' \)
- \( f \) est une bijection de \( \Omega \) sur \( \Omega' \)
- \( f^{-1} \) est encore \( C^k \)

Propriété d'invariance du domaine : si un tel difféomorphisme existe, alors \( \dim E = \dim E' \).

3.2 Théorème d'inversion locale

Soit \( E, E' \) deux ensembles de \( E \) et \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d \) où \( k + 1 \). On dit que \( f \) est un \( C^k \)-difféomorphisme de \( \Omega \) sur \( \Omega' \) si :
- \( f(\Omega) = \Omega' \) est un ouvert de \( E' \)
- \( f \) est injectif et \( f \) est un \( C^k \)-difféomorphisme de \( \Omega \) sur \( \Omega' \).

Consequence : soit \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d \) \( f \) est un \( C^k \)-difféomorphisme inertielle \( f(\Omega) \) sur \( f(\Omega) \) si le point \( x \) et \( f(x) \) sont un \( C^k \)-difféomorphisme de \( I \) sur \( I \).

3.3 Théorème d'inversion globale

Soit \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d \) \( f \) est injectif et \( f \) est un \( C^k \)-difféomorphisme de \( \Omega \) sur \( \Omega' \).

Remarque : dans le cas réel, si \( I \) est un intervalle de \( \mathbb{R} \) et \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d \) telle que \( f' \) est définie sur \( I \) alors \( f \) est un \( C^k \)-difféomorphisme de \( f \) sur \( f(\Omega) \).

3.4 Théorème des fonctions implicites \( \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \)

Soit \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d \) ouvert de \( E \) et \( f \) une application \( f \) et \( f \) est un \( C^k \)-difféomorphisme de \( \mathbb{R}^d \) sur \( \mathbb{R}^d \).

3.5 Théorème des fonctions implicites \( \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \)

Soit \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d \) et \( g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \) tels que \( f(x_0) = 0 \) et \( g(x) \neq 0 \). Alors il existe une troisième intervalle non vide \( I \) et \( K \) tels que \( I \times K \neq \mathbb{R}^d \) et \( g \in I \times K \) et il existe \( \mathbb{R}^d \) telle que \( \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \neq 0 \).

3.6 Énoncé général des fonctions implicites \( \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \)

Soit \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d \) et \( g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \) tels que \( f(x, y, ..., y_n) = g(x, y, ..., y_n) \) soit \( (X^*, Y^*) = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \) tel que \( f(X^*, Y^*) = 0 \), \( J_{X,Y}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}(R) \) où la jacobienne partielle par rapport à \( Y^* \) est supposée inversible. On peut alors écrire \( i_{1} \times \cdots \times i_{n} \neq \emptyset \times \cdots \times \emptyset \neq \emptyset \times \cdots \times \emptyset \) tels que \( \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \neq 0 \) et \( f(X, Y) = 0 \) \( \Rightarrow Y = f(X) \).

4 Formes différentielles de degré 1

4.1 Généralités

Soit \( E, E' = \mathbb{R}^d \) et \( \mathbb{R}^d \) un ouvert. Une forme différentielle de degré 1 sur \( \mathbb{R}^d \) et de classe \( C^k \) est une application \( \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \) et \( \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \) sa base duale. Une forme différentielle \( f \) est donnée par : \( f = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, ..., x_n) \partial i \). On peut donc noter \( \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, ..., x_n) \partial i \).

4.2 Formes fermées en extérieurs

Soit \( f \) une fonction \( \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \).

4.3 Théorème de Poincaré

Soit \( f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d \).

- Pour que \( f \) soit exacte, il faut qu'elle soit fermée.
- Si \( \Omega \) est étoilé, cette condition est suffisante.