Fonctions vectorielles

$\alpha 15 - MP^*$

1 Limites, continuité, calcul différentiel

1.1 Notion de limite

Soit E un ev normé de dimension finie (evnf), $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$. Si $x \in \overline{A}$, on dit que $\lim\limits_{y\to x} f(y) = l \in E$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \forall y \in A$, $[(y \neq x) \wedge (|y - x| \leqslant \alpha)] \Longrightarrow (\|f(y) - l\| \leqslant \varepsilon)$. Elle ne dépend pas de la norme.

1.2 Continuité

E un evnf, $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$; c'est la notion classique puisque $\mathbb{R}$ et E sont a fortiori des espaces métriques. Si $x \in A$, f est continue en x ssi $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$.

1. La continuité en un point (resp. sur A) ne dépend pas de la norme considérée
2. On peut toujours écrire $f : x \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $f_i : A \longrightarrow E$. f est alors continue ssi chaque f_i l'est.

1.3 Dérivée en un point, fonction dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un evnf, $f : I \longrightarrow E$. Si $x \in I$, $f'(x)$ est, si elle existe, la quantité $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Si f est dérivable en tout point de I, on peut ainsi définir la *fonction dérivée* $f' : I \longrightarrow E$.

$f'(x)$ existe ssi $f(x+h) = f(x) + h \cdot l + \vec{o}(h)$, avec $\|\vec{o}(h)\| = o(h)$. Dans ce cas, $f'(x) = l$. On peut ainsi définir les notions classiques $\mathcal{D}^1$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{D}^k$, $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$.

1.4 Calcul différentiel

1.4.1 Linéarité

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E$, $l \in \mathcal{L}(E, F)$ où E, F sont deux evnf. Alors $l \circ f$ est $\mathcal{D}^1$ et $(l \circ f)' = l \circ (f')$.

Soit $f, g : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E$, E evnf. Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{D}^1$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

1.4.2 $n-$linéarité

$E_1, \ldots E_n, E$ des evnf, $f_i : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E_i$, $\Phi : \prod\limits_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow E$ $n-$linéaire. Soit $F : x \in I \longmapsto \Phi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$; F est $\mathcal{D}^1$ et : $\forall x \in I$, $F'(x) = \Phi(f_1'(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) + \Phi(f_1(x), f_2'(x), \ldots, f_n(x)) + \ldots + \Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n'(x))$.

Exemples :

- $M, N : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, alors $t \longmapsto M(t)N(t)$ est $\mathcal{D}^1$ et $(MN)' = M'N + MN'$.
- E un evnf, $f : I \xrightarrow{\mathcal{D}^1} E$, $\lambda : I \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathbb{K}$; alors $t \longmapsto \lambda(t)f(t)$ est $\mathcal{D}^1$ et : $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$. De même, si $\lambda : I \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathbb{K}^*$, $(\frac{f}{\lambda})$ est $\mathcal{D}^1$ et $(\frac{f}{\lambda})' = \frac{\lambda f' - \lambda' f}{\lambda^2}$.

On a la formule de Leibniz : $f_1 : I \xrightarrow{\mathcal{D}^k} E_1$, $f_2 : I \xrightarrow{\mathcal{D}^k} E_2$, $\varphi : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ bilinéaire, $F : t \in I \longmapsto \varphi(f_1(t), f_2(t))$. Alors F est $\mathcal{D}^k$ et $\forall t \in I$, $F^{(k)}(t) = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \varphi(f_1^{(i)}(t), f_2^{(k-i)}(t))$.

2 Inégalités du calcul différentiel

2.1 Inégalités des accroissements finis

Soit E un evnf, une fonctions $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ satisfait les *conditions de Rolle* si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f et g satisfont les conditions de Rolle.

- Propriété 1 : Si de plus on a $\forall x \in]a, b[$, $\|f'(x)\| \leqslant g'(x)$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$.
- Propriété 2 (cas particulier) : Soit $M \in \mathbb{R}^+$, $g : x \longmapsto Mx$. Si f satisfait les hypothèses de Rolle et $\forall x \in]a, b[$, $\|f'(x)\| \leqslant M$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a)$.

Corollaires : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow E$ telle que f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

1. Si $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est constante sur I.
2. Si f' est bornée, alors f est lipschitzienne.

2.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit E un evnf, $f : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}^{n+1}} E$. Si $\forall x \in [a, b]$, $\|f^{(n+1)}(x)\| \leqslant M$, alors

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \gamma_{n+1}$$

avec $\|\gamma_{n+1}\| \leqslant M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

2.3 Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^n} E$. Soit $a \in I$, alors : $f(a + h) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$.

3 Calcul intégral

3.1 Intégrabilité sur un segment

Soit E un evn, $f : [a, b] \longrightarrow E$. On appelle somme de Riemann de f sur $[a, b]$ toute expression de la forme :

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(c_i)$$

où $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$ est un partage de $[a, b]$, noté σ, et pour tout i, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$. On appelle $\delta(\sigma) = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)$ le *module* du partage. f est *intégrable* sur $[a, b]$ si il existe $I \in E$ tel que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 /$ $(\delta(\sigma) \leqslant \alpha) \Longrightarrow (\|S(f) - I\| \leqslant \varepsilon)$. I est alors unique et on pose : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I$. Si E est complet, toute fonction $\mathcal{C}^0$ (même $\mathcal{C}^0_m$) est intégrable sur tout segment.

- Inégalité triangulaire : E un evnf, $f : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} E$, alors $\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t$.
- Intégration par parties : Si I est un segment, $f_1 : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1_m} E_1$, $f_2 : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1_m} E_2$, $\mathcal{B} : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ bilinéaire, alors :
$$\int_a^b \mathcal{B}(f_1'(x), f_2(x))\mathrm{d}x + \int_a^b \mathcal{B}(f_1(x), f_2'(x))\mathrm{d}x = [\mathcal{B}(f_1(x), f_2(x)]_a^b$$
- Formule de Taylor-Laplace : avec les notations du 2.2, $\gamma_{n+1} = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$.

3.2 Intégration sur un intervalle quelconque

E evn, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} E$. Même si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ a un sens pour tout segment $[a,b] \subset I$, cela ne suffit pas à donner un sens à $\int_I f$. Si E est de Banach et si $\|f\|$ est intégrable sur I, alors $\int_I f$ a un sens (par exemple $\int_I f = \lim\limits_{\substack{X \to \inf I \\ Y \to \sup I}} \int_X^Y f(t)\mathrm{d}t$). On dit alors que f est *intégrable* sur I. Si E est de Banach :

- Propriétés : Si $I = (a,b)$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $c \in I$ et $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} E$, f est intégrable ssi $f|_{(a,c]}$ et $f|_{[c,b)}$ le sont. Dans ce cas, $\int_I f = \int_{(a,c]} f + \int_{[c,b)} f$.
- Intégration par parties : Soit E, E_1, E_2 trois evnf, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0,\mathcal{C}^1_m} E_1$, $g : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0,\mathcal{C}^1_m} E_2$, $\mathcal{B} : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ bilinéaire. Si $\mathcal{B}(f_1', f_2)$ et $\mathcal{B}(f_1, f_2')$ sont intégrables, alors $\int_I \mathcal{B}(f_1', f_2) + \int_I \mathcal{B}(f_1, f_2') = [\mathcal{B}(f_1, f_2)]_{\inf I}^{\sup I}$.
- Si $\lim\limits_{\substack{X \to \inf I \\ Y \to \sup I}} \int_X^Y f(t)\mathrm{d}t$ existe mais f non intégrable, on dit que f est *semi-intégrable*. Par exemple, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est semi-intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Soit $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^0_m} E$ semi-intégrable ; si $c \in I$, $\exists \lim\limits_{Y \to \sup I} \int_c^Y f(t)\mathrm{d}t$ et $\exists \lim\limits_{X \to \inf I} \int_X^c f(t)\mathrm{d}t$; cela permet de définir $\int_I f = \lim\limits_{Y \to \sup I} \int_c^Y f + \lim\limits_{X \to \inf I} \int_X^c f$.

3.3 Théorème de relèvement

On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} \mathbb{U}$, alors :

1. $\exists \varphi : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in I$, $f(t) = e^{i\varphi(t)}$.
2. Si deux fonctions φ_1, $\varphi_2 : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$ satisfont cela, alors $\exists m \in \mathbb{Z} / \varphi_2 - \varphi_1 = \underline{2m\pi}$.

Tout cela reste vrai avec $k = 0$. De même si $f : I \xrightarrow{\mathcal{C}^{k \geqslant 1}} \mathbb{C}^*$, $\exists \rho : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}^{+*}$, $\exists \theta : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I$, $f(t) = \rho(t) e^{i\theta(t)}$. Dans ce cas, ρ est unique et θ est unique à $2m\pi$ près ($m \in \mathbb{Z}$).

On en déduit une condition suffisante de représentation polaire : Soit E un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\gamma : t \in I \longmapsto (x(t), y(t)) \in E$, avec $x, y : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$ On suppose que pour tout $t \in I$, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ forment une famille libre. Dans ce cas, pour tout t, $(x(t), y(t)) = (\rho(t)\cos\theta(t), \rho(t)\sin\theta(t))$, où $\rho : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}^+$ et $\theta : I \xrightarrow{\mathcal{C}^k} \mathbb{R}$. $\theta|_I^{\theta(I)}$ est un $\mathcal{C}^k-$difféomorphisme de I sur $\theta(I) = J$. L'application $\rho = \rho(\omega)$ est définie par : $\forall \omega$, $\rho(\omega) = \rho(\theta^{-1}(\omega)) : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

3.4 Rappel : difféomorphismes

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^* \bigcup \{+\infty\}$, on dit que $f : I \longrightarrow J$ est un $\mathcal{C}^k-$***difféomorphisme*** de I sur J si :

- f est $\mathcal{C}^k$ sur I
- f est bijective
- f^{-1} est $\mathcal{C}^k$ sur J.