DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°13

KÉVIN POLISANO
MP*

Vendredi 19 mars 2010

PARTIE I : CONVEXITÉ

1.a On veut montrer que le min est atteint, et $F$ est continue, ce qui nous suggère d’utiliser le théorème de Heine, mais pour l’appliquer on doit au préalable se ramener à un compact.

Comme $F(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\|u\| > \alpha \Rightarrow F(u) > F(0)$. On va alors considérer l’ensemble $C = \{v \in \mathbb{R}^n, F(v) \leq F(0)\}$ qui est un fermé de $\mathbb{R}^n$ (car image réciproque par $F$ continue du fermé $]-\infty, F(0)]$ de $\mathbb{R}$) et $C \subset B^r(0, \alpha)$ donc $C$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, d’après le théorème de Borel-Lesbegue $C$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

$F$ est continue donc d’après le théorème de Heine $\exists u \in C, F(u) = \min_{v \in C} F(v)$.

Enfin si $v$ n’appartient pas à $C$ alors $F(v) > F(0) \geq F(u)$. Conclusion : $\begin{cases} F(u) = \min_{v \in X} F(v) \end{cases}$

1.b Le minimum n’est en général pas unique, considérons par exemple la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 5)^2$. $F$ est bien continue, vérifie $F(u) \to +\infty$ si $\|u\| \to +\infty$ et atteint son min 0 sur le cercle d’équation $x^2 + y^2 = 5$ dans le plan $(Oxy)$. 

![Diagram](image)
Si $F$ est supposée de plus strictement convexe alors le min est unique. En effet supposons que le min $m$ soit atteint en 2 points distincts $u_1 \neq u_2$, $m = F(u_1) = F(u_2)$, alors $F(tu_1 + (1 - t)u_2) < tF(u_1) + (1 - t)F(u_2) = tm + (1 - t)m = m$ ce qui est absurde par définition du min.

2.a $F$ différentiable sur $\mathbb{R}^n$, donc $F((1-t)u + vt) = F(u + t(v - u)) = F(u) + t(dF)_u(v - u) + o(t) \frac{F((1-t)u + vt) - F(u)}{t} = (dF)_u(v - u) + o(1)$

Donc $\lim_{t \to 0} \frac{F((1-t)u + vt) - F(u)}{t} = (dF)_u(v - u)$. Par ailleurs $F$ étant convexe on a :

$$F((1-t)u + tv) - F(u) \leq (1-t)F(u) + tF(v) - F(u) = t(F(v) - F(u))$$

D'où :

$$\frac{F((1-t)u + tv) - F(u)}{t} \leq F(v) - F(u)$$

Puis en passant à la limite quand $t \to 0$ il vient :

$$(dF)_u(v - u) = < \nabla F(v), v - u > \leq F(v) - F(u) \iff F(v) \geq F(u) + < \nabla F(u), v - u > (1)$$

2.b Appliquons l'inégalité (1) aux couples $(w, u)$ et $(w, v)$ :

$$F(u) \geq F(w) + < \nabla F(w), u - w >$$

$$F(v) \geq F(w) + < \nabla F(w), v - w >$$

Avec $w = (1-t)u + tv$ on a $u - w = t(u - v)$ et $v - w = (1-t)(v - u)$ donc on a :

$$F(u) \geq F(w) + t < \nabla F(w), u - v >$$

$$F(v) \geq F(w) - (1-t) < \nabla F(w), u - v >$$

Multiplions la première inégalité par $(1-t)$ et la seconde par $t$, puis sommons les :

$$(1-t)F(u) + tF(v) \geq F(w) = F((1-t)u + tv)$$

Ainsi $F$ est convexe.

3. Le sens $\leq$ est immédiat, on applique 2.b avec l'inégalité stricte.

Le sens $\Rightarrow$ est plus délicat, on ne peut pas appliquer tel quel la même méthode qu'en 2.a car par passage à la limite dans :

$$\frac{F((1-t)u + tv) - F(u)}{t} < F(v) - F(u)$$

l'inégalité deviendrait large. Pour pallier ce problème on prend $t' \in ]0, t]$ et on vérifie que :

$$\frac{F((1-t')u + t'v) - F(u)}{t'} \leq \frac{F((1-t)u + tv) - F(u)}{t}$$

En effet la fonction $G : x \mapsto F((1-x)u + xv)$ est strictement convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$G(tx + (1-t)y) = F(((1-t)x - (1-t)y)u + (tx + (1-t)y)v) = F(t[(1-x)u + xv] + (1-t)[(1-y)u + yv])$$
Puis par stricte convexité de $F$ :

$$G(tx + (1-t)y) < tF((1-x)u + xv) + (1-t)F((1-y)u + yv) = tG(x) + (1-t)G(y)$$

Donc elle vérifie le lemme des 3 cordes, en particulier :

$$\frac{G(t') - G(0)}{t' - 0} \leq \frac{G(t) - G(0)}{t - 0}$$

ce que l’on voulait. Il ne reste plus qu’à faire tendre $t' \to 0$ avec $t$ fixé :

$$(dF)_u(v-u) \leq \frac{F((1-t)u + tv) - F(u)}{t} \leq F(v) - F(u)$$

4.a La condition $\nabla F(u) = 0$ n’est en général pas suffisante pour que $u$ soit un minimum de $F$, en effet reprenons notre exemple précédent $F : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - 5)^2$ qui est bien continue, et vérifie $F(u) \to +\infty$ si $\|u\| \to +\infty$. Le gradient de $F$ est :

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4x^2 - 8x \\ 4x^2 y + 4y^3 - 8y \end{pmatrix}$$

Donc $(0,0)$ est un point critique, mais $F(0,0) = 25$ tandis que le min de $F$ est 0.

![Diagram](image)

4.b En revanche si $F$ est de plus supposée **convexe** alors la condition devient suffisante puisque d’après (1) :

$$\forall v \in X, F(v) \geq F(u) + \langle \nabla F(u), v - u \rangle$$

Ainsi $u$ est un point de **minimum** de $F$. 

3
5.a $F$ est convexe, donc on applique de nouveau (1) aux couples $(u, v)$ et $(v, u)$ : 
\[ F(v) \geq F(u) + \langle \nabla F(u), v - u \rangle \]
\[ F(u) \geq F(v) + \langle \nabla F(u), u - v \rangle \]

Puis on somme les deux inégalités et on obtient :
\[ \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla F(u) - \nabla F(v), u - v \rangle \geq 0 \]

5.b Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = (1 - t)F(u) + tF(v) - F((1 - t)u + tv)$.

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(t) = (1 - t)u + tv$ et $G = F \circ f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Différentions $G : (dG)_t(h) = (dF)_{f(t)} \circ (df)_t(h)$.

On a directement $(df)_t(h) = h(v - u)$ et comme $G$ est réelle $(dG)_t(h) = G'(t)h$ (de même $(dG)_t(h) = G'(t)h$) d'où : $G'(t) = (dF)_{f(t)}(v - u) = \langle \nabla F(f(t)), v - u \rangle$ et par conséquent :
\[ \phi'(t) = F(v) - F(u) - \langle \nabla F((1 - t)u + tv), v - u \rangle \]

$\phi$ est continue sur $[0, 1]$ et $\phi(0) = \phi(1) = 0$ donc d’après le théorème de Rolle :
\[ \exists t_0 \in [0, 1], \phi'(t_0) = 0 \iff \langle \nabla F((1 - t)u + t_0v), v - u \rangle = F(v) - F(u) \]

Par hypothèse on a $\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla F(u) - \nabla F(v), u - v \rangle \geq 0$, appliqué à $(1 - t)u + tv$ et $u$ on a :
\[ \langle \nabla F((1 - t)u + tv) - \nabla F(u), (1 - t)u + tv - u \rangle \geq 0 \iff \langle \nabla F((1 - t)u + tv), v - u \rangle \geq \langle \nabla F(u), v - u \rangle \]

En particulier pour $t = t_0$ il vient :
\[ F(v) - F(u) \geq \langle \nabla F(u), v - u \rangle \]

Ceci étant valable pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^n$ on sait d’après 2.b que $F$ et convexe.

6. On va comme en 3. se ramener au cas réel avec $G : t \mapsto F((1 - t)u + tv) = F(f(t))$. Vu 5.b :
\[ G'(t) = (dF)_{f(t)}(v - u) = \langle \nabla F(f(t)), v - u \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(f(t)) \times (v_i - u_i) \]

Calculons la dérivée seconde de $G$, comme $v - u$ ne dépend pas de $t$ on a :
\[ G''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_{H} \right)'(v_i - u_i) \]

Or comme en 5.b : $(H(f(t)))' = (dH)_{f(t)}(v - u) = \langle \nabla H(f(t)), v - u \rangle = \langle \nabla \left[ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_{H}(f(t)), v - u \rangle$
\[ G(t) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla \left[ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_{H}(f(t)), v - u \rangle \times (v_i - u_i) \]

D’où :
\[ G''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(f(t)) \times (v_j - u_j) \right) \times (v_i - u_i) = \sum_{i=1}^{n} \left( \nabla^2 F(f(t))(v - u) \right)_i \times (v_i - u_i) \]
Soit finalement :

\[ G''(t) = \langle \nabla^2 F(f(t))(v-u), v-u \rangle = \langle \nabla^2 F(u+t(v-u))(v-u), v-u \rangle \]

\[ \Rightarrow F \text{ est convexe, on a alors vu en 3. que } G_{u,w}(t) = F(u+tw) \text{ est convexe } \forall u, w \text{ donc :} \]

\[ \forall u, w, \forall t, G''_{u,w}(t) = \langle \nabla^2 F(u+tw)w, w \rangle \geq 0 \]

Donc si \( F \) convexe on a bien \( \forall u, v \in \mathbb{R}^n, < \nabla^2 F(u)v, v > \geq 0 \).

\[ \iff \text{ Réciproquement si } \forall u, v \in \mathbb{R}^n, < \nabla^2 F(u)v, v > \geq 0 \text{ alors :} \]

\[ \forall u, v \in \mathbb{R}^n, G''_{u,w}(t) \geq 0 \forall t \]

Donc \( \forall u, v \in \mathbb{R}^n G_{u,v} \) est convexe, reste à montrer qu’alors \( F \) est convexe, en effet :

\[ F((1-t)u+tv) = F(u+t(v-u)) = G_{u,w}(t) = (1-t)G_{u,w}(0) + tG_{u,w}(1) = (1-t)F(u) + tF(v) \]

Si \( F \) est \( C^2 \) on a donc démontré l’équivalence suivante :

\[ \boxed{ F \text{ convexe } \iff \forall u, v \in \mathbb{R}^n, < \nabla^2 F(u)v, v > \geq 0 } \]

**Partie II : Régularisation quadratique**

1. Soit l’application \( F_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \) définie par \( F_\lambda(u) = \| f - u \|^2 + \lambda \| Au \|^2 \).

\( F \) est \( C^2 \) car \( \| . \| \) se présente comme une somme de carré des composantes (donc un polynôme).

\[ F_\lambda(u+h) = \langle f-u-h, f-u-h \rangle + \lambda < Au+Ah, Au+Ah > = F_\lambda(u) + \| h \|^2 - 2 \langle f-u, h \rangle + \lambda < Au, Ah > + \| Ah \|^2 \]

\( h \mapsto Ah \) est linéaire, donc continue car \( \mathbb{R}^n \) de dimension finie, donc il existe \( k \) tel que \( \| Ah \| \leq k \| h \| \), par conséquent \( \| Ah \|^2 \) est un \( o(h^2) \) (même \( o(h^2) \)). Et \( h \mapsto 2(\lambda < Au, Ah > - < f - u, h >) \) étant linéaire il s’agit donc de la différentielle de \( F_\lambda \) en \( u \) :

\[ d(F_\lambda)_u(h) = 2(\lambda < Au, Ah > - < f - u, h >) = 2(\lambda A^*Au + u - f, h) \]

Il s’en suit que :

\[ \nabla F_\lambda(u) = 2(\lambda A^*Au + u - f) \]

La différentielle de \( F_\lambda \) est l’application \( dF_\lambda : u \mapsto (dF_\lambda)_u \). Différentions-là à son tour :

\[ dF_\lambda(u + k) = (dF_\lambda)_{u+k} = (dF_\lambda)_u + g(k) \quad \text{où } g(k) : h \mapsto 2 < \lambda A^*Ak + k, h > \]

\( g \) est clairement linéaire donc \( (d^2F_\lambda)_u(k) = g(k) \) avec \( g(k)(h) = 2 < \lambda A^*Ak + k, h > \). Or :

\[ (d^2F_\lambda)_u(k)(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_j \partial x_i}(u)h_i k_j = \langle \nabla^2 F_\lambda k, h \rangle \]

Ceci étant valable pour tout \( h \) on en tire \( \forall k, \nabla^2 F_\lambda(u)k = 2(\lambda A^*A + I_n)k \) et par suite :

\[ \nabla^2 F_\lambda(u) = 2(\lambda A^*A + I_n) \]
2. Calculons la quantité suivante :
\[ \nabla^2 F_\lambda(u)v, v \rangle = 2 < (\lambda A^* A + I_n) v, v > = 2 \lambda < A^* A v, v > + 2 < v, v > = 2 \lambda \| A v \|^2 + 2 \| v \|^2 > 0 \]
Ceci étant valable pour tous \( u, v \in \mathbb{R}^n \) on en déduit que \( F_\lambda \) est strictement convexe.

3. On vérifie que \( F_\lambda \) satisfait les conditions de la questions 1.1 : elle est continue puisque \( C^2 \), \( F_\lambda(u) \to +\infty \) quand \( \| u \| \to +\infty \) et est strictement convexe, donc la sous-question 1.b assure l’existence et l’unicité de \( u_\lambda \in \mathbb{R}^n \) tel que \( F_\lambda(u_\lambda) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} F_\lambda(v) \).

Et d’après 1.4.b la condition \( \nabla F(u) = 0 \) est une CNS de minimalité pour \( F \) en \( u \) donc :
\[ F_\lambda(u_\lambda) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} F_\lambda(v) \iff \nabla F(u_\lambda) = 0 \iff u_\lambda - f + \lambda A^* A u_\lambda = 0 \]

4.a On a montré que \( \forall v \in \mathbb{R}^n, < (\lambda A^* A + I_n) v, v > > 0 \) donc \( \lambda A^* A + I_n \) est symétrique définie positive, donc son spectre est inclus dans \( \mathbb{R}^+ \) et il s’en suit que \( \lambda A^* A + I_n \) est inversible, on peut donc isoler \( u_\lambda \) :
\[ u_\lambda = (\lambda A^* A + I_n)^{-1} f \]
Par continuité de l’inverse, en faisant tendre \( \lambda \to 0 \) il vient :
\[ \lim_{\lambda \to 0} u_\lambda = f \]

4.b Comme \( F_\lambda(u_\lambda) \) est le minimum de \( F \) on a en particulier \( F_\lambda(u_\lambda) \leq F_\lambda(0) = \| f \|^2 \) d’où :
\[ 0 \leq \| A u_\lambda \|^2 = \frac{F_\lambda(u_\lambda) - \| f - u \|^2}{\lambda} \leq \frac{F_\lambda}{\lambda} \leq \frac{\| f \|^2}{\lambda} \]
Par encadrement il vient en passant à la limite :
\[ \lim_{\lambda \to +\infty} A u_\lambda = 0 \]

5. D’après 3. on a la caractérisation des \( u_\lambda^1 \) :
\[ u_\lambda^1 - f_1 + \lambda A^* A u_\lambda^1 = 0 \]
\[ u_\lambda^2 - f_2 + \lambda A^* A u_\lambda^2 = 0 \]
Par soustraction on a :
\[ (I_n + \lambda A^* A)(u_\lambda^1 - u_\lambda^2) = f_1 - f_2 \iff u_\lambda^1 - u_\lambda^2 = (I_n + \lambda A^* A)^{-1}(f_1 - f_2) \]
Par ailleurs en développant le produit scalaire :
\[ \| (I_n + \lambda A^* A)v \|^2 = \| v \|^2 + \lambda^2 \| A^* A v \|^2 + 2 \| A v \|^2 \geq \| v \|^2 \Rightarrow \| v \| \leq \| (I_n + \lambda A^* A)v \| \]
Puis en faisant \( v \leftarrow (I_n + \lambda A^* A)^{-1} v \) on obtient :
\[ \| (I_n + \lambda A^* A)^{-1} v \| \leq \| v \| \]
D’où la majoration suivante :
\[ \| u_\lambda^1 - u_\lambda^2 \| \leq \| f_1 - f_2 \| \]

Partie III : Régularisation à croissance linéaire
1. Notons $H(u) = \langle e, A(u) \rangle$.

$$H(u + h) = \sum_{i=1}^{n} (A_i(u + h))_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varepsilon^2 + ((Au)_i + (Ah)_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2 + 2(Au)_i(Ah)_i + (Ah)_i^2}$$

$$H(u + h) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2} \left[ 1 + \frac{2(Au)_i(Ah)_i + (Ah)_i^2}{\varepsilon^2 + (Au)_i^2} \right]^{1/2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2} \left[ 1 + \frac{(Ah)_i}{\varepsilon^2 + (Au)_i^2} + o(h^2) \right]$$

$$H(u + h) = H(u) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(Ah)_i}{(Au)_i} + o(h) = H(u) + \langle B(u), Ah \rangle + o(h)$$

Donc $(dH)_u(h) = \langle B(u), Ah \rangle + \langle A^* B(u), h \rangle$ qui est bien linéaire. Ainsi :

$$(dG)_u(h) = \langle u - f + A^* B(u), h \rangle \Rightarrow \nabla G(u) = u - f + A^* B(u)$$

2. En prenant des inégalités strictes dans la preuve de I.5.a et I.5.b on a :

$G$ strictement convexe $\iff \forall u \neq v \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla G(u) - \nabla G(v), u - v \rangle > 0$

$$\langle \nabla G(u) - \nabla G(v), u - v \rangle = \langle u - v + A^*(B(u) - B(v)), u - v \rangle \geq \|u - v\|^2 + A^*(B(u) - B(v)), u - v >$$

$$\alpha = \langle B(u) - B(v), Au - Av \rangle = \langle B(u), Au \rangle + \langle B(v), Av \rangle = \langle B(u), Av \rangle - \langle B(v), Au \rangle$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{(Au)_i^2}{(A(u))_i} + \frac{(Av)_i^2}{(A(v))_i} - \frac{(Au)_i(Av)_i}{(A(u))_i(A(v))_i} \right)$$

Posons $x_i = (Au)_i$ et $y_i = (Av)_i$, les termes de la somme sont ainsi :

$$\frac{x_i^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + x_i^2}} + \frac{y_i^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + y_i^2}} - \frac{x_iy_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + x_i^2}} - \frac{x_iy_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + y_i^2}} = (x_i - y_i) \left( \frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + x_i^2}} - \frac{y_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + y_i^2}} \right)$$

Comme cette expression est symétrique en $x, y$ on peut supposer $x_i > y_i$.

La fonction $f_\varepsilon : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}}$ a pour dérivée :

$$f_\varepsilon'(x) = \frac{\varepsilon^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} > 0$$

Donc $f_\varepsilon$ est croissante, donc

$$(x_i - y_i) \left[ \frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + x_i^2}} - \frac{y_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + y_i^2}} \right] > 0$$

Finalement :

$$\forall u \neq v \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla G(u) - \nabla G(v), u - v \rangle \geq \|u - v\|^2 + \langle B(u) - B(v), A(u - v) \rangle \geq \|u - v\|^2 > 0$$
Donc $G$ est **strictement convexe**, est continue et vérifie bien $G(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$.

D’après I.1 il existe un unique $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(u) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} G(v)$.

D’après I.4 $u$ est caractérisé par

$$\nabla F(u) = 0 \iff u - f + A^*B(u) = 0$$

3. $G_n(u) = \tau G(u) + \frac{1}{2} \|u - u^n\|^2$. Le gradient du deuxième terme est $u^n - u$, ainsi :

$$\nabla G_n(u) = \tau(u - f + A^*B(u)) + u^n - u$$

$G_n$ reste strictement convexe (car on ajoute à $\tau G$ ($\tau > 0$) une fonction strictement convexe), vérifie encore $G_n(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$ (car la fonction ajoutée est positive), donc on applique de nouveau les résultats du I.1 et I.4 : il existe un unique $u^{n+1}$ tel que $G_n(u^{n+1}) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} G_n(v)$ caractérisé par :

$$\nabla G_n(u^{n+1}) = 0 \iff \tau(u^{n+1} - f + A^*B(u^{n+1})) + u^n - u^{n+1} = 0 \iff \boxed{\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -u^{n+1} + f - A^*B(u^{n+1})}$$

4. Montrons que les sommes partielles associées à cette série sont majorées :

$$G_n(u^{n+1}) = \tau G(u^{n+1}) + \frac{1}{2} \|u^{n+1} - u^n\|^2 \iff \|u^{n+1} - u^n\|^2 = 2(G_n(u^{n+1}) - \tau G(u^{n+1}))$$

Par définition du minimum on a $G_n(u^{n+1}) \leq G_n(u^n) = \tau G(u^n)$ d’où :

$$\|u^{n+1} - u^n\|^2 \leq 2\tau(G(u^n) - G(u^{n+1}))$$

On a donc une somme tél scopique :

$$\sum_{n=0}^{N} \|u^{n+1} - u_n\|^2 \leq 2\tau(G(u^0) - G(u^{N+1})) \leq 2\tau G(u^0)$$

compte tenu du fait que $G$ est positive.

On en conclut que la série $\sum \|u^n - u^{n+1}\|^2$ est **convergente**.

5. Vu la caractérisation de $u^{n+1}$ à la question 3, on écrit :

$$u^{n+1} = f - A^*B(u^{n+1}) - \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}$$

Par l’inégalité triangulaire on a :

$$\|u^{n+1}\| \leq \|f\| + \|A^*B(u^{n+1})\| + \frac{1}{\tau} \|u^{n+1} - u^n\|$$

Or il est clair que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ les composantes de $B(u)$ sont majorées par 1, donc $\|B(u)\| \leq N$. Et comme $A^*$ est linéaire donc continue car en dimension finie, il existe $k$ tel que $\|A^*X\| \leq k\|X\|$ et en particulier $\|A^*B(u^{n+1})\| \leq k\|B(u^{n+1})\| \leq kN$.  

8
Enfin d’après 4, la série $\sum \|u^{n+1} - u^n\|^2$ est convergente, donc nécessairement $u^{n+1} - u^n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ donc est bornée par $M > 0$. Finalement :

$$\|u^{n+1}\| \leq \|f\| + kN + \frac{M}{\tau}$$

Ainsi la suite $(u^n)$ est bornée.

6. Comme $(u^n)$ est bornée disons par $M'$, tous ses termes appartiennent à la boule fermée $B = B'(0, M')$. $B$ est fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ donc compacte, ainsi $(u^n)$ admet au moins une valeur d’adhérence dans $B$, notons là $v$, et $\phi$ l’extractrice telle que $u^{\phi(n)} \to v$ quand $n \to +\infty$. Etant donné la relation de récurrence obtenue en 3. :

$$\frac{u^{\phi(n)+1} - u^{\phi(n)}}{\tau} = -u^{\phi(n)+1} + f - A^* B(u^{\phi(n)+1})$$

$B$ n’est pas linéaire mais a le bon goût d’être continu (car $A$ l’est) donc par passage à la limite on obtient :

$$0 = -v + f - A^* B(v)$$

$v$ vérifie la même relation que $u$, qui est caractérisée de façon unique donc $v = u$. Par conséquent $(u^n)$ ne possède qu’une seule valeur d’adhérence $u \in B$ donc converge vers celle-ci car $B$ est compacte.

7. Pour $\varepsilon = 0$ on a $A_\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^N |(Au)|$. On imagine bien que c’est la non dérivabilité de la valeur absolue en 0 qui va poser problème. Donc on se ramène au cas réel en considérant la fonction $\delta : t \mapsto |t| < e, A_0(tu) >$. Par linéarité on a $\delta : t \mapsto |t| < e, A_0(u) >$.

Si $G$ était différentiable alors $u \mapsto < e, A_0(u) >$ le serait (car $\varepsilon \frac{1}{2} \|f - u\|^2$) et donc $\delta$ le serait, or $\delta$ n’est pas dérivable en 0, contradiction. Pour $\varepsilon = 0$, $G$ n’est pas différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

**Partie IV : Méthode de type quasi-Newton**

1. $(Av)_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} v_j$, $(C(u)v)_i = \sum_{j=1}^n \frac{A_{i,j}}{(A\varepsilon(u))_i} v_j = \frac{1}{(A\varepsilon(u))_i} \sum_{j=1}^n A_{i,j} v_j = \frac{1}{(A\varepsilon(u))_i} (Av)_i$, d’où :

$$< Av, C(u)v > = \sum_{i=1}^n (Av)_i (C(u)v)_i = \sum_{i=1}^n \frac{(Av)^2_ i}{(A\varepsilon(u))_i} \geq 0$$

2. Pour montrer que la relation $G(u^{n+1}, u^n) = \min G(v, u^n)$ définit une suite $(u^n)$ unique il suffit de montrer qu’à $u^n$ fixé (donc supposé préalablement construit), le minimum de la fonction $v \mapsto G(v, u^n)$ est atteint en un unique élément qui sera le terme suivant $u^{n+1}$. On construit ainsi par récurrence la suite $(u^n)$ à partir d’un $u^0$ donné. Le problème revient donc à montrer que la fonction $v \mapsto G(v, u^n)$ vérifie les hypothèses du I.1 :

D’après la question précédente on a :

$$\frac{1}{2} < v - u, \mathcal{A}(u)(v - u) > = \frac{1}{2} \|v - u\|^2 + \frac{1}{2} \|v - u, A^* C(v - u) > \geq \frac{1}{2} \|v - u\|^2$$
Par Cauchy-Schwartz : \( \frac{|v - u, \nabla G(u)|}{\|v - u\|^2} \leq \frac{\|\nabla G(u)\|}{\|v - u\|} \to 0 \) quand \( \|v\| \to +\infty \).

Le terme \( <v - u, \nabla G(u)> \) étant négligeable par rapport à \( \frac{1}{2}\|v - u\|^2 \) quand \( \|v\| \to +\infty \) on a :

\[
\mathcal{G}(v, u) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|v\| \to +\infty
\]

Montrons alors que \( H : v \mapsto \mathcal{G}(v, u) \) est strictement convexe, calculons son gradient en \( v \) :

\[
H(v) = G(u) - < u, \nabla G(u) > + \frac{1}{2} < u, A(u)(u) > + < v, \nabla G(u) > + \frac{1}{2} ( < v, A(u) v > - < v, A(u) u > - < u, A(u) v > )
\]

\[\Rightarrow < v, A(u) v > \]

Occupons nous du terme \( < v, A(u) v > \) :

\[
<v + h, A(u)(v + h) >= < v, A(u) v > + < h, A(u) v + A(u)^* v > + < h, A(u) h >
\]

avec par Cauchy-Schwartz : \( < h, A(u) h > \leq \|h\| \|A(u) h\| \leq \|A(u)\| \|h\|^2 = o(h) \).

En passant au gradient il vient :

\[
\nabla H(v) = \nabla G(u) + \frac{1}{2} ( A(u) v + A(u)^* v ) - \frac{1}{2} A(u) u - \frac{1}{2} A(u)^* u = \nabla G(u) + \frac{1}{2} ( A(u) + A(u)^* ) (v - u)
\]

Et \( A(u) + A(u)^* = 2I_n + A^* C(u) + (A^* C(u))^* \). Notons \( (\gamma_{i,j}) = A^* C(u) \), par produit :

\[
\gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} \frac{A_k}{(A_{z}(u))_k}
\]

On a alors que \( \gamma_{i,j} = \gamma_{j,i} \), donc \( A^* C(u) \) est symétrique :

\[
\nabla H(v) = \nabla G(u) + v - u + A^* C(u) (v - u)
\]

Et on a montré à la question III.1 que \( \nabla G(u) = u - f + A^* B(u) \) donc :

\[
\nabla H(v) = v - f + A^* B(u) - A^* C(u) u + A^* C(u) v
\]

On remarque enfin que \( A^* B(u) = A^* C(u) u \) d'où :

\[
\nabla H(v) = v - f + A^* C(u) v
\]

Comme c'est une application linéaire on a de façon immédiate :

\[
\nabla^2 H(v) = I_n + A^* C(u)
\]

Il s'en suit :

\[
\forall v \in \mathbb{R}^n - \{0\} , < \nabla^2 H(v) v, v > = < v, v > + < A^* C(u) v, v > = \|v\|^2 + < Av, C(u) v > \geq \|v\|^2 > 0
\]

et \( H \) est bien \textit{strictement convexe}. 

10
Par conséquent $H : v \mapsto G(v, u^n)$ atteint son min en un unique élément $u^{n+1}$ caractérisé par
\[ \nabla H(u^{n+1}) = 0 \iff u^{n+1} - f + A^*C(u^n)u^{n+1} = 0 \]

3.a On reconnait une simple identité remarquable :
\[ a_i - b_i + \frac{1}{2} b_i^2 - \frac{a_i^2}{a_i} = \frac{1}{2 a_i} (a_i^2 - 2 a_i b_i + b_i^2) = \frac{(a_i - b_i)^2}{2 a_i} \geq 0 \]

3.b Montrons que la quantité suivante est positive :
\[ G(v, u) - G(v) = \frac{1}{2} \| f - u \|^2 + \sum_{i=1}^n (A_i(u))_i + < v - u, \nabla G(u) > \\
+ \frac{1}{2} \| v - u \|^2 + \frac{1}{2} < v - u, A^*C(u)(v - u) > - \frac{1}{2} \| f - v \|^2 - \sum_{i=1}^n (A_i(v))_i \]

Comme l’énoncé suggère d’utiliser la question précédente, on va se ramener aux composantes des vecteurs. En développant les produits scalaires on a :
\[ \frac{1}{2} (\| f - u \|^2 + \| v - u \|^2 - \| f - v \|^2) = \| u \|^2 + < f, v > - < v, u > - < f, u > \]

D’autre part comme $\nabla G(u) = u - f + A^*B(u)$ on a :
\[ < v - u, \nabla G(u) >= < v, u > + < u, f > - \| u \|^2 - < v, f > + < v - u, A^*B(u) > \]

Donc la somme de ces deux termes vaut $< v - u, A^*B(u) > = \sum_{i=1}^n \frac{(A_i(v - u))_i (Au)_i}{(A_i(u))_i}$.

Enfin d’après la question 1.
\[ < v - u, A^*C(u)(v - u) >= < A(v - u), C(u)(v - u) > = \sum_{i=1}^n \frac{(A(v - u))_i^2}{(A_i(u))_i} \]

D’où en sommant le tout :
\[ G(v, u) - G(v) = \sum_{i=1}^n \left[ (A_i(u))_i - (A_i(v))_i + \frac{(A(v - u))_i (Au)_i}{(A_i(u))_i} + \frac{(A(v - u))_i^2}{(A_i(u))_i} \right] \]
\[ = \sum_{i=1}^n \left[ (A_i(u))_i - (A_i(v))_i + \frac{1}{2} \frac{(Av)_i^2 - (Au)_i^2}{(A_i(u))_i} \right] \]
\[ = \sum_{i=1}^n \left[ (A_i(u))_i - (A_i(v))_i + \frac{1}{2} \frac{(A_i v)_i^2 - (A_i u)_i^2}{(A_i(u))_i} \right] \]

On conclut d’après 3.a que les termes de la somme sont tous positifs et donc :
\[ G(v) \leq G(v, u) \]

**Partie V : Régularisation non différentiable**

1.a Pour $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\| v \|_\infty \leq 1$ on a :
\[ < v, Au > = \sum_{i=1}^n v_i (Au)_i \leq \| v \|_\infty \sum_{i=1}^n |(Au)_i| \leq \| Au \|_1 \]
l’égalité ayant lieu pour des \( v_i = \text{sgn}((A u)_i) \), d’où :

\[
\sup_{\|v\|_\infty \leq 1} L(u, v) = H(u)
\]

1.b Partons de l’expression donnée :

\[
\frac{1}{2}(\|f - u - Av\|^2 - \|f - Av\|^2 + \|f\|^2) = \frac{1}{2}(\|f - Av\|^2 - 2 < f, u > + 2 < Av, u > + \|u\|^2 - \|f - Av\|^2 + \|f\|^2)
\]

\[
= \frac{1}{2}(\|f\|^2 - 2 < f, u > + \|u\|^2 + 2 < v, Au >)
\]

\[
= \frac{1}{2}(\|f - u\|^2 + 2 < v, Au >)
\]

\[
= L(u, v)
\]