T.D. 4

Transformée de Fourier

Exercice 1 *Calculs de transformées de Fourier*

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$. Calculer celle de $g(x) = U(x)f(x)$, U étant l'échelon unité, valant 1 sur R_+ et 0 sinon. En déduire que :

$$F[x^n e^{-x} U(x)](\nu) = \frac{n!}{(1+2i\pi\nu)^{n+1}}$$

2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\rho_n(x) = n\Pi(nx)$ (Π étant défini à l'équation (2). Tracer les graphes de ρ_n et $\hat{\rho}_n$. Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$?

3. *Modulation*

Evaluer $F[\cos(2\pi\nu_0 x)f(x)]$. Exemple : $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$. Illustration graphique.

Exercice 2 Le but de cet exercice est le calcul de la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

1. Vérifier que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et tracer son graphe.

2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 2\pi xy = 0 \qquad (1)$$

3. Appliquer la transformée de Fourier à l'équation (1) et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\hat{f}$.

4. En déduire le calcul de $\hat{f}$.

Exercice 3 *Fonction porte*

Soit Π la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \le 1/2 \\ 0 & si \quad |x| > 1/2 \end{cases} \qquad (2)$$

1. Calculer $\hat{\Pi}$ et tracer le spectre de Π. Vérifier le théorème du cours $\lim_{\nu\to\infty} \hat{\Pi}(\nu) = 0$.

2. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^2(x)dx$

3. En déduire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \pi$$

Exercice 4 *Fonction triangle*

Soit Λ la fonction, affine par morceaux, valant 0 sur $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$, et 1 au point $x = 0$.

1. Donner l'expression de $\Lambda(x)$.

2. Montrer que Λ est dérivable par morceaux, et montrer que l'on peut écrire
$\Lambda'(x) = \Pi(x+1/2) - \Pi(x-1/2)$.

3. Calculer la transformée de Fourier de Λ'. En déduire celle de Λ.

4. Montrer que Λ s'exprime en fonction de Π par le produit de convolution $\Lambda = \Pi * \Pi$.

Exercice 5 *Fonctions splines*

Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $\varphi_p(x) = (\Pi * \ldots * \Pi)(x)$ la fonction convoluant p-fois la fonction porte.

1. Calculer la transformée de Fourier de φ_p.

2. Montrer que φ_p est une fonction de classe C^p, polynomiale de degré $p+1$ sur des intervalles de longueur 1 et calculer son support.

Exercice 6 *Rapport entre TF et coefficients de Fourier*
Soit f_0 une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, nulle en dehors de l'intervalle $[0,T]$. Soit f la fonction "périodisée" de f_0 la période T :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_0(x+nT)$$

1. Vérifier que f est une fonction périodique de période T, intégrable sur $[0,T]$.
2. Montrer que le coefficient de Fourier de f, noté $c_n(f)$ $(n \in \mathbb{Z})$, vérifie :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\hat{f}_0(\frac{n}{T})$$

o $\hat{f}_0$ est la transformée de Fourier de la fonction f_0.
Interprétation ? Comment peut-on utiliser la FFT pour calculer f_0 ?

Exercice 7 Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation intégrale $(a > 0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-t|} f(t)dt = e^{-x^2}$$

Exercice 8 Soit a et b deux réels tels que $a, b > 0$ et $a \neq b$.
1. Calculer la transformée de Fourier de $e^{-a|x|}$.
2. En déduire les valeurs des produits de convolution $\frac{1}{a^2+x^2} * \frac{1}{b^2+x^2}$ et $e^{-a|x|} * e^{-b|x|}$.

Exercice 9 *(cf exercice précédent - ex indépendant)*
Soit a et b deux réels tels que $a, b > 0$ et $a \neq b$.
1. Calculer la transformée de Fourier de $e^{-a|x|}$.
2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On *admet* l'existence d'une fonction $y \in L^2(\mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle :

$$-y'' + a^2 y = f \tag{3}$$

Donner l'expression de y sous forme intégrale.
3. Montrer l'unicité de la solution y appartenant à $L^2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la fontion $e^{-a|x|} * e^{-b|x|}$ satisfait l'équation différentielle :

$$-y'' + a^2 y = e^{-b|x|} \tag{4}$$

(on fera deux calculs distincts dans $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ et on ajustera les constantes d'intégration en écrivant la continuité à l'origine de y et y').
5. En déduire le calcul de $e^{-a|x|} * e^{-b|x|}$.

Exercice 10 Montrer, en utilisant la régularité d'une transformée de Fourier, qu'il n'existe pas de fonction χ, intégrable sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $\chi * \chi = \chi$.
En déduire que la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément neutre.

Exercice 11 Soit $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ et $f_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|}\frac{\sin x}{|x|}$ $(\lambda > 0)$. Calculer, pour ξ fixé, $\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{f}_\lambda(\xi)$. En déduire $\hat{f}_\lambda(\xi)$. En déduire $\hat{f}(\xi)$.

Exercice 12 *Equation de la chaleur*
Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \\ f(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{5}$$

o φ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ support compact. On pose :

$$F(\nu,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\; e^{-2i\pi\nu x} dx$$

1. On suppose que la solution f appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$. Vérifier que F vérifie :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 4\pi^2\nu^2 F = 0$$

2. En déduire F, puis f.