TD 3

Théorème de Fubini, Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 Calculer l'intégrale :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy$$

En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$.

Exercice 2 On considère la fonction, définie pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Montrer, par une méthode de votre choix, que cette fonction n'est pas intégrable sur $[0,1] \times [0,1]$.

Exercice 3 On pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2t} - \frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\ dt$$

Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et calculer $\int f$.

Exercice 4

1. Vérifier

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx} dt$$

2. Utiliser ce résultat pour montrer :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 5 Convergence et calcul de l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$$

Exercice 6

Soit $f \in L^\infty([0,1])$, positive ou nulle presque partout sur $[0,1]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$F(t) = \int_0^1 (f(x) + t^2)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

1. Montrez que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que F est dérivable à droite en 0. Calculez la dérivée à droite en 0 de F.

Exercice 7 Soit
$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx}\, \frac{\sin x}{x}\, dx$$

1. Calculer $f'(t)$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.
2. en déduire la valeur de $f(t)$ pour tout $t > 0$.
3. Peut-on en déduire la valeur en $t = 0$?

Exercice 8
1. Montrer que la fonction φ définie par $(a \geq 0)$:
$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(u^2 + au^{-2})} du$$
est définie et continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $\varphi(a)$ pour tout $a \geq 0$ en établissant une équation différentielle vérifiée par φ.

Exercice 9 *Produit de convolution*
On définit le produit de convolution de deux fonctions f et g intégrables sur $\mathbb{R}$ par :
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) g(y) dy$$
Montrer que $f * g$ est intégrable et que :
$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$
En déduire que $f * g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 La *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie pour tout $\nu \in \mathbb{R}$:
$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \tag{1}$$
Montrer que $\hat{f}$ est une fonction de L^{∞}, continue, et que :
$$\|f\|_{L^{\infty}} \leq \|f\|_{L^1}$$