# TD 1
*Théorie de la mesure*

## Exercice 1
Montrer que l'ensemble des nombres rationnels est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

## Exercice 2 *Triadique de Cantor*
Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble constitué de réunions finies de segments deux à deux disjoints. Définissons l'application

$$\begin{array}{llll} \mathcal{T}: & \mathcal{A} & \to \mathcal{A} \\ & \bigcup\limits_{1\le i\le n} [a_i, b_i] & \mapsto \bigcup\limits_{1\le i\le n} \left( [a_i, a_i + \dfrac{b_i - a_i}{3}] \cup [b_i - \dfrac{b_i - a_i}{3}, b_i] \right) \end{array}$$

On note $K_0 = [0,1]$ et on définit par récurrence $K_{n+1} = \mathcal{T}(K_n)$.
On définit le triadique de Cantor $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$.

**1.** Calculer $K_1$, $K_2$ et $K_3$.
**2.** Montrer que la mesure de Lebesgue de $K$ est nulle.
**3.** Si $x \in [0,1]$ montrer que

$$x \in K \Longleftrightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \quad avec \quad x_k \in \{0,2\}$$

En déduire que $K$ n'est pas dénombrable

## Exercice 3 *Escalier du diable*
Considérons une suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_0(x) = x$ et par la récurrence suivante

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & si \quad 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & si \quad \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{1+f_n(3x-2)}{2} & si \quad \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

**1.** Tracer $f_1$, $f_2$ et $f_3$.
**2.** Montrer que pour $p > q$

$$\forall x \in [0,1] \quad |f_p(x) - f_q(x)| \le \frac{1}{2^q}$$

et en déduire que la limite de la suite $(f_n)$ notée $f$ existe et est continue.
**3.** Montrer que $f$ est de dérivée nulle sur $[0,1]\backslash K$.
**4.** A t-on la relation classique $\int_0^x f'(y)\, dy = f(x)$ ?

## Exercice 4
Soit $\mu$ une mesure positive. Montrer les propriétés suivantes:

1. Si $A_n$ est une suite d'ensembles mesurables, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\ge 0} A_n\right) \le \sum_{n\ge 0} \mu(A_n)$$

2. Si $A, B \subset \mathbb{R}^N$ sont mesurables, on a:

$$\mu(A \bigcup B) + \mu(A \bigcap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

3. Si $A_n$ est une suite croissante d'ensembles mesurables on a :

$$\mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \lim_n \mu(A_n)$$

4. Si $A_n$ est une suite décroissante d'ensembles mesurables et si $\mu(A_1) < +\infty$, on a :

$$\mu(\bigcap_1^\infty A_n) = \lim_n \mu(A_n)$$

**Exercice 5** Pour une suite $(a_n)$, $\sup(a_n)$ désigne la borne supérieure dans $[0, \infty]$. La limite supérieure, lim sup $(a_n)$, est la limite de la suite décroissante (minorée par 0)

$$s_k = \sup_{n \geq k}(a_n)$$

Pour une suite de fonctions $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sup\limits_n f_n$ est la fonction $x \to \sup_n f_n(x)$; la fonction lim sup $f_n$ est la fonction $x \to$ lim sup $f_n(x)$. On définit de même les bornes inférieures et les limites inférieures.

**1.** Montrer que si $f_n$ est mesurable alors $\sup f_n$ et $\inf f_n$ le sont. (On commencera par montrer que $\{x \in X,\ \sup\limits_n f_n > a\} = \bigcup\limits_n \{x \in X,\ f_n > a\}$)

**2.** Montrer ensuite que si $f_n$ est mesurable lim sup $f_n$ et lim inf $f_n$ le sont

**Exercice 6** Si $s$ est une fonction étagée, et $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, alors

$$B \in \mathcal{B} \to \int_B s \ d\mu$$

est une mesure.