

# Résolution numérique de l'équation de Laplace. Application à l'étude de l'écoulement d'une couche de peinture sur une plaque plane.

Travaux pratiques du cours de méthodes numériques, ENSIMAG, 1<sup>re</sup> année

Du 21 mars au 2 mai 2011

L'objectif de ces travaux pratiques est la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles modélisant l'écoulement de peinture induit par le déplacement d'un pinceau. Un tel calcul permet par exemple d'estimer l'épaisseur de la couche de peinture déposée sur une surface.

Ces travaux vous permettront de mettre en application des méthodes itératives de résolution de système linéaire vu en cours. Vous utiliserez également des formules d'intégration numérique basées sur la théorie des polynômes d'interpolation.

## Informations pratiques :

Elles seront mise à jour sur la page web suivante :

<http://www-ljk.imag.fr/membres/Adrien.Magni/mn.html>

## 1 Description du problème

Il s'agit d'étudier l'écoulement de peinture induit par le déplacement d'un pinceau sur une paroi plane horizontale. Dans ce modèle rudimentaire, on suppose que le pinceau est constitué d'une infinité de plaques planes rigides d'épaisseur négligeable et disposées verticalement. La peinture occupe la totalité du volume délimité par les plaques et la paroi (figure 1).

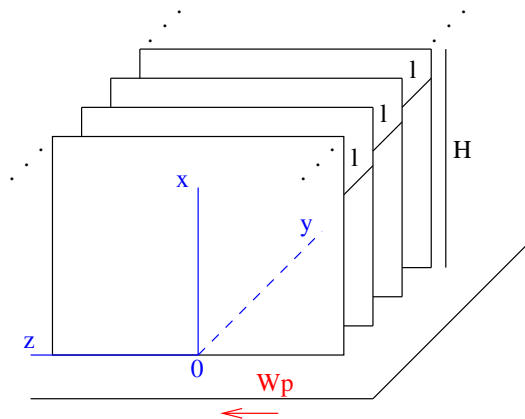


FIG. 1 – Modèle du pinceau.

La distance de séparation des plaques est  $l$ . Le pinceau se déplace à une vitesse constante  $-W_P$  par rapport à la paroi horizontale. On choisit un repère cartésien orthonormé  $Oxyz$  dans le référentiel lié au pinceau. La paroi horizontale coïncide avec le plan  $Oyz$  et défile sous le pinceau

(fixe) avec une vitesse  $W_P$  dans la direction Oz. Les plaques verticales composant le pinceau sont parallèles au plan Oxz, de longueur infinie dans la direction Oz et H suivant Ox. On fait les hypothèses suivantes :

- fluide newtonien homogène incompressible,
- écoulement permanent et unidirectionnel dans la direction Oz,
- champ de pression uniforme et constant au cours du temps,
- forces de pesanteur négligeables.

La loi fondamentale de la dynamique se réduit alors à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

où  $w(x, y)$  est la composante du champ de vitesse suivant Oz. Le problème étant périodique en y de période l, on étudie seulement un élément fondamental de largeur l. La peinture adhère aux plaques, donc les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} w(0, y) = W_P, \quad \forall y \in [0, l], \\ w(H, y) = 0, \quad \forall y \in [0, l], \\ w(x, 0) = w(x, l) = 0, \quad \forall x \in [0, H]. \end{cases} \quad (2)$$

Le problème à résoudre est donc modélisé par (1) et (2). Il est schématisé dans la figure 2.

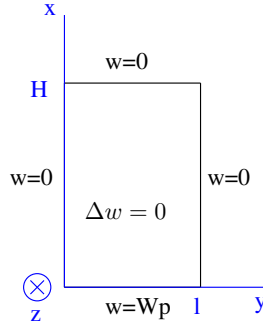


FIG. 2 – Schématisation du problème à résoudre.

## 1.1 Approximation par différences finies

On propose de résoudre l'équation de Laplace (1) munie des conditions aux limites de Dirichlet (2) par une approximation de type différences finies. On considère une discrétisation du domaine  $[0, H] \times [0, l]$  suivant une grille régulière formée par des points de coordonnées  $(x_i, y_j)$ , avec  $x_i = i h$ ,  $y_j = j k$ ,  $h = H/(M + 1)$ ,  $k = l/(N + 1)$ ,  $0 \leq i \leq M + 1$  et  $1 \leq j \leq N + 1$ . On note  $w_{i,j}$  une approximation de  $w(x_i, y_j)$ , obtenue par un schéma aux différences finies que nous allons décrire. On fixe  $w_{0,j} = W_P$  et  $w_{M+1,j} = w_{i,0} = w_{i,N+1} = 0$ , d'après les conditions aux limites (2). Lorsque  $w$  est de classe  $C^4$  on a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2} [w(x_{i+1}, y_j) - 2w(x_i, y_j) + w(x_{i-1}, y_j)] = O(h^2)$$

(utiliser la formule de Taylor comme dans le premier chapitre du cours). De même

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{k^2} [w(x_i, y_{j+1}) - 2w(x_i, y_j) + w(x_i, y_{j-1})] = O(k^2).$$

L'équation (1) donne donc en  $(x_i, y_j)$

$$\frac{1}{h^2 k^2} [-k^2 w(x_{i+1}, y_j) - k^2 w(x_{i-1}, y_j) - h^2 w(x_i, y_{j-1}) - h^2 w(x_i, y_{j+1}) + 2(h^2 + k^2)w(x_i, y_j)] = O(h^2) + O(k^2).$$

On remplace donc (1)-(2) par le problème approché

$$\begin{cases} -k^2 w_{i+1,j} - k^2 w_{i-1,j} - h^2 w_{i,j-1} - h^2 w_{i,j+1} + 2(h^2 + k^2)w_{i,j} = 0 \\ w_{0,j} = W_P, W_{M+1,j} = W_{i,0} = W_{i,N+1} = 0 \\ 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N. \end{cases} \quad (3)$$

On définit le vecteur

$$u = (w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,N}, w_{2,1}, w_{2,2}, \dots, w_{2,N}, \dots, w_{M,1}, w_{M,2}, \dots, w_{M,N})^T \quad (4)$$

contenant les valeurs approchées de  $w$  à calculer. On note aussi

$$b = k^2 (W_P, W_P, \dots, W_P, 0, 0, \dots, 0)^T, \quad (5)$$

où seulement les  $N$  premières composantes de  $b$  sont non nulles. Le problème (3) s'écrit sous la forme

$$Au = b \quad (6)$$

avec  $A \in M_{MN}(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  s'écrit par blocs de taille  $N$

$$A = \begin{pmatrix} S & -D & 0 & \dots & 0 \\ -D & S & -D & 0 & \vdots \\ 0 & -D & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & S & -D \\ 0 & \dots & 0 & -D & S \end{pmatrix} \quad (7)$$

où  $D = k^2 I$ ,  $I$  désignant la matrice identité d'ordre  $N$ , et  $S \in M_N(\mathbb{R})$  s'écrit

$$S = \begin{pmatrix} 2h^2 + 2k^2 & -h^2 & 0 & \dots & 0 \\ -h^2 & 2h^2 + 2k^2 & -h^2 & 0 & \vdots \\ 0 & -h^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 2h^2 + 2k^2 & -h^2 \\ 0 & \dots & 0 & -h^2 & 2h^2 + 2k^2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que  $A$  est inversible et symétrique définie positive.

## 2 Résolution numérique d'un système linéaire

### 2.1 Complément sur les méthodes itératives

Les méthodes itératives sont des méthodes couramment utilisées pour résoudre des systèmes linéaire creux de grande taille. Elles sont issues de plusieurs années de recherche et la construction de nouvelles méthodes, plus rapides et plus précises, est encore un domaine de recherche actif. Nous exposons ici un résumé des principales méthodes de résolution de systèmes dont la matrice est symétrique définie positive.

Notons

$$Ax = b \quad (8)$$

le système à résoudre. On peut décomposer la matrice  $A$  sous la forme  $A = M - (M - A) = M - N$ , la matrice  $M$  étant facilement inversible. On considère alors la solution du système (8) comme la limite de la suite  $(x^{(k)})_{k \geq 0}$  définie par

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b = (M - A)x^{(k)} + b, \quad (9)$$

et une condition initiale  $x^{(0)}$ . De manière équivalente, (9) peut s'écrire :

$$M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = b - Ax^{(k)} \quad (10)$$

et on note  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  le résidu. Ainsi si  $x^{(k)} \rightarrow x$  alors  $Ax = b$ . Les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sont définies par des choix particuliers de la matrice  $M$ . Dans le premier cas  $M = D$ , la diagonale de  $A$  et dans le second  $P = D + L$ ,  $L$  étant la partie triangulaire inférieure de  $A$ . Citons aussi la méthode de relaxation SOR qui consiste à choisir  $M = L + D/\omega$ ,  $\omega \in ]0, 2[$  étant un paramètre à déterminer pour optimiser la vitesse de convergence. Supposons connu  $x^{(k)}$ , l'itéré suivant est donné par la relation

$$(D + \omega L)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)D - \omega U]x^{(k)} + \omega b.$$

La  $i^{\text{eme}}$  composante de  $x^{(k+1)}$  vérifie donc

$$a_{ii}x_i^{k+1} + \omega \sum_{k < i} a_{ik}x_k^{(k+1)} = (1 - \omega)a_{ii}x_i^{(k)} - \omega \sum_{k > i} a_{ik}x_k^{(k)} + \omega b_i$$

qui s'écrit encore

$$x_i^{k+1} = x_i + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( - \sum_k a_{ik}x_k + b_i \right) \quad (11)$$

si les  $(i - 1)$  premières composantes du vecteur  $x$  sont celles de  $x^{(k+1)}$  et les composantes  $i, i + 1, \dots, n$  sont celles de  $x^{(k)}$ .

La méthode de Richardson stationnaire consiste à choisir  $M = I$ , la matrice identité, et d'introduire un paramètre  $\alpha$  pour accélérer la convergence des itérés  $x^{(k)}$  vers la solution  $x$  du système. (10) devient

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \alpha r^{(k)}. \quad (12)$$

La condition initiale  $x^{(0)}$  étant donnée, le résidu  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  l'est aussi. Supposons  $x^{(k)}$  et  $r^{(k)}$  connus, et calculons  $x^{(k+1)}, r^{(k+1)}$ .  $x^{(k+1)}$  est donné par (12) et  $r^{(k+1)}$  est déterminé en injectant la valeur de  $x^{(k+1)}$  donnée par (12) dans la définition du résidu  $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)}$ . Finalement les itérés de la méthode de Richardson peuvent être calculés par l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x^{(0)}, \text{ donne, } r^{(0)} = b - Ax^{(0)}, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha r^{(k)}, \\ r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha Ax^{(k)} \end{cases}$$

Remarquons que le résidu  $r^{(k)} = -\nabla\Phi(x^{(k)})$  avec

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} (Aw, w) - (b, w). \quad (13)$$

Les parenthèses représentent le produit scalaire euclidien  $(x, y) = \sum x_i y_i$ . On peut montrer que le minimum de  $\Phi$  est atteint en  $x$ , solution du système (8). La méthode de Richardson est donc aussi une méthode de minimisation de (13).

La méthode des gradients conjugués utilise cette remarque en optimisant l'algorithme de Richardson pour que la minimisation soit plus rapide. Les itérés sont alors calculés de la manière suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)},$$

Où  $p^{(k)}$  est la direction de descente, et le coefficient  $\alpha^{(k)}$  dépend des itérations. Les  $p^{(k)}$  sont déterminées telles que  $(p^{(k+1)}, Ap^{(k)}) = 0$  ou de manière équivalente

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta^{(k+1)} p^{(k)}, \text{ avec } \beta^{(k+1)} = \frac{(r^{(k+1)}, -Ap^{(k)})}{(p^{(k)}, Ap^{(k)})}.$$

Le paramètre  $\alpha^{(k)}$  est calculé afin que  $\Phi(x^{(k+1)})$  soit minimal  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . On obtient

$$\alpha^{(k)} = \frac{(r^{(k)}, p^{(k)})}{(p^{(k)}, Ap^{(k)})}.$$

On peut montrer que les réels  $\alpha^{(k)}$  et  $\beta^{(k+1)}$  s'écrivent aussi

$$\alpha^{(k)} = \|r^{(k)}\|_2^2 / (p^{(k)}, Ap^{(k)})$$

$$\beta^{(k+1)} = \|r^{(k+1)}\|_2^2 / \|r^{(k)}\|_2^2,$$

où  $\|x\|_2^2 = (x, x)$ . La méthode des gradients conjugués se résume donc ainsi :

$$\begin{aligned} & x^{(0)} \text{ donne, } p^{(0)} = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}. \\ & \text{Tant que } \|r^{(k)}\|_2 / \|b\|_2 > \epsilon \text{ faire :} \\ & \left[ \begin{array}{l} \alpha^{(k)} = \|r^{(k)}\|_2^2 / (p^{(k)}, Ap^{(k)}) \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)} \\ r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} Ap^{(k)} \\ \beta^{(k+1)} = \|r^{(k+1)}\|_2^2 / \|r^{(k)}\|_2^2 \\ p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta^{(k+1)} p^{(k)}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (14)$$

Cette méthode est efficace pour résoudre de nombreux systèmes, mais la convergence peut être lente si la matrice  $A$  est mal conditionnée. Une astuce dite de préconditionnement consiste à multiplier le système (8) par l'inverse d'une matrice  $P$ , facile à calculer. L'intérêt est d'obtenir un nouveau système à résoudre dont la matrice  $P^{-1}A$  est mieux conditionnée que  $A$ . Le nouveau système obtenu sera plus rapide à résoudre. Dans le cas extrême où l'on choisirait  $P = A$  le système  $P^{-1}Ax = P^{-1}b$  est directement résolu, mais la matrice  $P = A$  doit être inversée. La matrice  $A$  étant symétrique et définie positive il existe une décomposition de cholesky  $A = TT^T$ . Il est possible de choisir  $P$  comme étant une décomposition "simplifiée"  $P = \tilde{T}\tilde{T}^T$ , où l'on impose que seuls les termes diagonaux et sous diagonaux de  $T$  soient non nuls. Les coefficients non nuls de  $\tilde{T} = (t_{i,j})$  sont alors donnés en fonction de  $A = (a_{i,j})$  par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}, \quad t_{2,1} = a_{2,1}/t_{1,1} \\ t_{p,p} = (a_{p,p} - t_{p,p-1}^2)^{1/2}, \quad p = 2, \dots, MN \\ t_{p,p-1} = a_{p,p-1}/t_{p-1,p-1}, \quad p = 2, \dots, MN. \end{array} \right. \quad (15)$$

Considérons à nouveau la méthode de Richardson (12) pour résoudre le système  $P^{-1}Ax = P^{-1}b$ . En remplaçant  $A$  par  $P^{-1}A$  et  $b$  par  $P^{-1}b$  on a,

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \alpha \left( P^{-1}b - P^{-1}Ax^{(k)} \right)$$

ou encore en multipliant par  $P$ ,

$$P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \alpha \left( b - Ax^{(k)} \right) = \alpha r^{(k)}. \quad (16)$$

Dans le cas particulier où  $\alpha = 1$ , on retrouve l'égalité (10) avec  $M = P$ .

De la même façon que l'on a construit la méthode des gradients conjugués, (16) peut se généraliser en utilisant une direction de descente optimale :

$$P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \alpha^{(k)} p^{(k)}.$$

On obtient la méthode des gradients conjugués préconditionnés suivante, où  $P$  est une matrice symétrique définie positive :

$$\begin{aligned} & x^{(0)} \text{ donne, } r^{(0)} = b - Ax^{(0)}, p^{(0)} = z^{(0)} = P^{-1}r^{(0)}. \\ & \text{Tant que } \|r^{(k)}\|_2 / \|b\|_2 > \epsilon \text{ Faire :} \\ & \left[ \begin{array}{l} \alpha^{(k)} = (z^{(k)}, r^{(k)}) / (p^{(k)}, Ap^{(k)}) \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)} \\ r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} Ap^{(k)} \\ Pz^{(k+1)} = r^{(k+1)} \\ \beta^{(k+1)} = (z^{(k+1)}, r^{(k+1)}) / (z^{(k)}, r^{(k)}) \\ p^{(k+1)} = z^{(k+1)} + \beta^{(k+1)} p^{(k)}. \end{array} \right. \quad (17) \end{aligned}$$

## 2.2 Comparaison des principales méthodes

L'efficacité des méthodes exposées précédemment va être analysée en comparant leur vitesse de convergence. On considère pour cela le problème test suivant ( les conditions aux limites et le terme source sont différents du problème physique étudié) :

$$\begin{aligned} -\Delta w &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y), \quad x \in [0, H], \quad y \in [0, l], \\ w(0, y) &= w(H, y) = 0, \quad \forall y \in [0, l], \\ w(x, 0) &= w(x, l) = 0, \quad \forall x \in [0, H]. \end{aligned} \quad (18)$$

On se donne la solution exacte

$$w(x, y) = 100 x y (x - H)(y - l) \quad (19)$$

L'erreur faite avec la solution numérique pourra ainsi être calculée. Le terme source  $f(x, y)$  est déterminé en injectant la solution (19) dans l'équation (18). La résolution du problème (18) est faite par la méthode des différences finies, en utilisant la même discrétisation qu'au paragraphe 1.1. La solution numérique  $w_{num}$  est contenue dans le vecteur  $u$  (4) qui est solution du système  $Au = s$ , la matrice  $A$  étant la même qu'en (7). Le second membre  $s$  est

$$s = h^2 k^2 (f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,N}, f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{2,N}, \dots, f_{M,1}, f_{M,2}, \dots, f_{M,N})^T, \quad (20)$$

où on a noté  $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$  pour  $i = 1, \dots, M$  et  $j = 1, \dots, N$ .

Par la suite on fixe la condition initiale  $x^{(0)} = 0$ , et on désigne par  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne  $\|x\|_2 = (x, x)^{1/2}$ . On utilisera le critère d'arrêt suivant :

$$\|r^{(k)}\| / \|b\| < \epsilon \text{ ou } k \geq k_{max}. \quad (21)$$

**Question 1** Ecrire une fonction définissant la matrice  $A$  sous forme de matrice creuse. On évite de stocker les zéros de la matrice pour économiser de l'espace mémoire. On utilisera un tableau  $A(1:N*M,1:5)$ , puisqu'il y a au maximum 5 coefficients non nuls sur chaque ligne.

**Question 2** Ecrire une fonction qui calcule la composante  $i$  du produit de la matrice  $A$  par un vecteur  $x$  puis une autre qui calcule le vecteur  $y = Ax$ . La matrice  $A$  construite à la question 1 sera présente en argument de ces deux fonctions.

**Question 3** Ecrire une fonction `sor` qui calcule les itérés  $x^{(k)}$  définis par (11) jusqu'à ce que le critère d'arrêt (21) soit atteint. Les paramètres d'entrée sont la matrice  $A$ , les dimensions  $N$  et  $M$ , le second membre  $b$ , le critère d'arrêt  $\epsilon$ , le paramètre  $\omega$ , et le nombre d'itérations maximal  $k_{max}$ . En sortie, la fonction retourne la solution du système, le nombre d'itérations nite effectuées et le résidu obtenu à chaque itération (sous la forme d'un tableau `res(1:nite)`).

**Question 4** Ecrire une fonction qui calcule le produit scalaire euclidien  $(x, y) = \sum x_i y_i$  de deux vecteurs.

**Question 5** Ecrire une fonction `gc` qui calcule les itérés  $x^{(k)}$  définis par l'algorithme (14) jusqu'à ce que le critère d'arrêt (21) soit atteint. Les paramètres d'entrée sont la matrice  $A$ , les dimensions  $N$  et  $M$ , le second membre  $b$ , le critère d'arrêt  $\epsilon$ , et le nombre d'itérations maximal  $k_{max}$ . En sortie, la fonction retourne la solution du système, le nombre d'itérations nite effectuées et le résidu obtenu à chaque itération (sous la forme d'un tableau `res(1:nite)`).

**Question 6** Ecrire une fonction qui construit la matrice  $\tilde{T}$  dont les coefficients sont définis en (15). Seuls les coefficients non nuls seront stockés.

**Question 7** Ecrire une fonction qui résout le système  $Px = y$  dans les deux cas suivants :  $P = D$  et  $P = \tilde{T}\tilde{T}^T$ . On rappelle que  $D$  est la partie diagonale de  $A$ . Dans le cas où  $P = \tilde{T}\tilde{T}^T$  on résoudra deux systèmes triangulaire, une étape de descente ( $\tilde{T}z = y$ ) et une autre de remontée ( $\tilde{T}^T x = z$ ).

**Question 8** Ecrire une fonction `gcp` qui calcule les itérés  $x^{(k)}$  définis par l'algorithme (17) jusqu'à ce que le critère d'arrêt (21) soit atteint. Les paramètres d'entrée sont la matrice  $A$ , les dimensions  $N$  et  $M$ , le second membre  $b$ , le critère d'arrêt  $\epsilon$ , le nombre d'itérations maximal  $k_{max}$  et un entier `numP` qui indique la matrice  $P$  que l'on considère. En sortie, la fonction retourne la solution du système, le nombre d'itérations nite effectuées et le résidu obtenu à chaque itération (sous la forme d'un tableau `res(1:nite)`).

**Question 9** On fixe  $\epsilon = 10^{-5}$ ,  $N = 50$ ,  $M = 20$ ,  $H = 2$ ,  $l = 1/2$  et  $x^{(0)} = 0$ .

Ecrire un programme qui construit le vecteur (20) et calcule les solutions numériques  $w_{num}$  du problème (18) en résolvant le système par les méthodes SOR, des gradients conjugués, puis en utilisant les matrices  $P = D$  et  $\tilde{T}\tilde{T}^T$  pour préconditionner le système. Pour la méthode SOR, on utilisera le paramètre  $\omega = 2/(1 + \sin(\pi k))$ .

Dans les cinq cas, vous donnerez le nombre d'itérations effectuées, l'erreur avec la solution exacte  $\|w_{ex} - w_{num}\|_2$  et vous tracerez la courbe du résidu en fonction des itérations en échelle logarithmique.

### 2.3 Application au problème physique : simulation de l'écoulement de la peinture

Ayant validé la méthode des gradients conjugués pour résoudre le système  $Au = s$  dans la section précédente, on l'utilise maintenant pour simuler l'écoulement de peinture présenté dans le paragraphe 1.

**Question 10** On fixe  $\epsilon = 10^{-5}$ ,  $N = 100$ ,  $M = 40$ ,  $H = 2$ ,  $l = 0.5$ ,  $W_P = 50$  et  $x^{(0)} = 0$ . Écrire un programme qui construit le vecteur (5) et calcule la solution numérique du problème (3) en résolvant le système (6) par une méthode de gradient conjugué préconditionné par la matrice  $P = \tilde{T}\tilde{T}^T$ . Vous donnerez le nombre d'itérations effectuées, et afficherez la solution numérique obtenue.

## 3 Calcul du débit par intégration numérique

On souhaite calculer le débit volumique  $D$  de peinture entre deux plaques verticales de hauteur  $H$  et distantes de  $l$ . La couche de peinture déposée sur la paroi pourra ensuite s'en déduire. La difficulté consiste à approcher l'intégrale bidimensionnelle suivante :

$$D = \int_0^H \int_0^l w(x, y) dx dy. \quad (22)$$

Désignons dans la suite  $f$ , une fonction réelle, continue sur un intervalle  $[a, b]$  et cherchons tout d'abord à approcher l'intégrale monodimensionnelle

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

On appelle *formule de quadrature* à  $m$  points pour l'intégrale  $I(f)$  une approximation de la forme  $I(f) \approx Q_m(f)$ ,

$$Q_m(f) = (b - a) \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i),$$

c'est-à-dire une somme pondérée de valeurs de  $f$  en des points  $(x_i)_{1, \dots, m}$  de l'intervalle  $[a, b]$ . On dit que ces points sont les *nœuds* de la formule de quadrature, et que les nombres  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  sont ses *poids* — même si les poids réels sont en fait les  $(b - a)\alpha_i$ . Les poids et les nœuds dépendent de  $m$  mais pas de  $f$ .

Une manière d'obtenir une formule de quadrature est d'intégrer une approximation polynomiale de la fonction  $f$ . L'idée est que si les deux fonctions sont proches, leurs intégrales le sont aussi. Ainsi, pour  $m \geq 2$ , la formule de Newton-Cotes à  $m$  points est définie par

$$Q_{NC(m)} = \int_a^b P_{m-1}(x) dx,$$

où  $P_{m-1}$  est le polynôme de degré  $m - 1$  qui interpole  $f$  aux points  $x_i = a + (i - 1) \frac{b-a}{m-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Un calcul simple permet d'obtenir les expressions suivantes de  $Q_{NC}$  pour  $m = 2, \dots, 4$  :

$$\begin{aligned} Q_{NC(2)} &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)), \quad (\text{formule des trapèzes}) \\ Q_{NC(3)} &= \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)), \quad (\text{formule de Simpson}) \\ Q_{NC(4)} &= \frac{b-a}{8} (f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)), \end{aligned}$$



Il est possible d'estimer l'erreur de ces différentes approximations, suivant les valeurs de  $m$ . On peut montrer, par exemple, que si  $f$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^4$  sur  $[a, b]$ , alors l'erreur pour la formule de Simpson vérifie

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q_{NC(3)} \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} M_4,$$

où  $M_4 = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$ .

Une idée pour améliorer l'approximation est de diviser l'intervalle  $[a, b]$  de départ, et d'appliquer les formules de Newton-Cotes sur chaque sous-intervalle.

Soit  $a = z_0 < \dots < z_{n+1} = b$  une subdivision de  $[a, b]$ , on peut écrire

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} f(x) dx.$$

En appliquant la formule  $Q_{NC(m)}$  à chaque sous-intervalle, on obtient une *formule de quadrature composite*. On note  $Q_{NC(m)}^{(n)}$  l'approximation de  $I(f)$  ainsi obtenue. Nous ne considérons que des formules composites sur subdivisions uniformes :  $z_i = a + ih, i = 0, \dots, n+1$ , avec  $h = \frac{b-a}{n+1}$ . En notant

$$p = \begin{cases} m+1 & \text{si } m \text{ est impair} \\ m & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases},$$

on montre que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $[a, b]$ , on a l'estimation d'erreur suivante pour la formule composite :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q_{NC(m)}^{(n)} \right| = O(h^p M_p),$$

ou l'on a noté  $M_p = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(p)}(x)|$ .

Considérons maintenant l'intégrale d'une fonction  $g$ , réelle et continue sur un intervalle  $[a, b] \times [c, d]$  :

$$J(g) = \int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy.$$

On introduit une subdivision  $a = z_0 < \dots < z_{M+1} = b$  de l'intervalle  $[a, b]$  et  $c = w_0 < \dots < w_{N+1} = d$  de  $[c, d]$ . Alors,

$$J(g) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \int_{w_j}^{w_{j+1}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} g(x, y) dx dy. \quad (23)$$

En utilisant des formules de quadrature à  $m$  points

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} g(x, y) dx = (z_{i+1} - z_i) \sum_{k=1}^m \alpha_k g(x_k, y).$$

L'expression (23) de  $J(g)$  est alors approchée par la formule suivante :

$$Q_{2D(m)}^{(M, N)} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N (z_{i+1} - z_i)(w_{j+1} - w_j) \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \alpha_k \alpha_l g(x_k, x_l). \quad (24)$$

En utilisant la formule de quadrature des trapèzes, et en notant  $h = (b - a)/(M + 1)$ ,  $k = (d - c)/(N + 1)$ , (24) se simplifie comme ceci

$$Q_{2D(2)}^{(M,N)} = \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N (g(z_i, w_j) + g(z_i, w_{j+1}) + g(z_{i+1}, w_j) + g(z_{i+1}, w_{j+1})). \quad (25)$$

**Question 11** *Ecrire une fonction `Int_2d` qui calcule  $Q_{2D(2)}^{(M,N)}$ .*

### 3.1 Estimation de la couche de peinture déposée sur une paroi plane

L'épaisseur  $\delta$  de la couche de peinture déposée par le pinceau sur la paroi horizontale est définie comme étant celle d'une couche fictive de vitesse uniforme  $W_p$  au voisinage de la surface  $x = 0$  et de débit volumique  $D$ . Ainsi,

$$W_p l \delta = D = \int_0^H \int_0^l w(x, y) dx dy. \quad (26)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, il est possible de calculer la solution  $w$  du problème (1)-(2) sous la forme d'une série, à condition que la hauteur  $H \rightarrow \infty$ . On en déduit alors une formule analytique du débit :

$$D = \frac{8 W_p l^2}{\pi^3} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3}, \quad (27)$$

qui s'approxime à l'aide de la fonction d'Apéry  $a = 1.20205690315959\dots$

$$D = \frac{7 a}{\pi^3} W_p l^2. \quad (28)$$

**Question 12** *Calculez le débit  $D$  en intégrant la solution numérique obtenue à la question 10 ( $N = 100$ ,  $M = 40$ ,  $H = 2$  et  $l = 0.5$ ). En déduire l'épaisseur de la couche de peinture  $\delta$  déposée sur la paroi.*