

Lagrangien versus Eulerien

Aérodynamique II

10 janvier 2013

Table des matières

1 Milieux continus	3
1.1 Préliminaires	3
1.1.1 Caractéristiques	3
1.1.2 Déterminant et cofacteurs	4
1.1.3 Changements de variables	4
1.1.4 Formule de Reynolds	5
1.2 Conservation de la masse	6
1.2.1 Conservation de la masse eulérien	6
1.2.2 Conservation de la masse lagrangien	6
1.3 Conservation de la quantité de mouvement	6
1.3.1 Conservation de la quantité de mouvement eulérien	6
1.3.2 Conservation de la quantité de mouvement lagrangien	7
1.4 Conservation de l'énergie totale	9
1.4.1 Conservation de l'énergie totale en eulérien	9
1.4.2 Conservation de l'énergie totale en lagrangien	10
1.5 Conservation de l'énergie interne	11
1.5.1 Conservation de l'énergie interne en eulérien	11
1.5.2 Conservation de l'énergie interne en lagrangien	12
1.6 Résumé	12
2 Élasticité lagrangienne	14
2.1 Matériau hyperelastique	14
2.2 Principe d'indifférence matérielle	15
2.3 Matériaux isotropes	16
2.4 Calcul du tenseur des contraintes Σ	17
2.4.1 Décomposition générale	17
2.4.2 Décomposition volumique et isochoric	18
2.5 Calcul du tenseur des contraintes σ	19
2.5.1 Décomposition générale	20
2.5.2 Décomposition volumique et isochoric	20

3	Elasticité Eulérienne	22
3.1	Préliminaires	22
3.2	Matériau hyperelastique isotrope vérifiant l'AIM	25
3.3	Calcul du tenseur des contraintes σ	25
3.3.1	Décomposition générale	25
3.3.2	Décomposition volumique et isochoric	27
4	Gaz compressibles	29
4.1	Approche élastique volumique des gaz	29
4.2	Approche classique thermodynamique des gaz	30
4.3	Lois de comportement pour les gaz	31
4.3.1	Gaz parfait	32
4.3.2	Stiffened gas	33
4.3.3	Gaz de Van der Waals	33
4.4	Modèle complet gaz compressible eulérien	34
5	Conditions de stabilité en dimension 1	35
5.1	Formulation eulérienne	35
5.1.1	Calcul des valeurs propres	35
5.2	Formulation lagrangienne	37
5.3	Lien entre les deux formulations	38
5.4	Cas particuliers	39
5.4.1	Euler isotherme	39
5.4.2	Cas quadratique	40
5.4.3	Cas Shallow water	41

Chapitre 1

Milieux continus

1.1 Préliminaires

1.1.1 Caractéristiques

On s'intéresse à un milieu continu qui occupe l'espace Ω_0 dans la configuration de référence (ou initiale) et Ω_t dans la configuration déformée au temps t . Tous les domaines que l'on considère dans la suite sont inclus dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3

On définit les caractéristiques directes X

$$\begin{aligned} X : \Omega_0 \times [0, T] &\longrightarrow \Omega_t \\ (\xi, t) &\longmapsto X(\xi, t) \end{aligned}$$

Le champ de vitesse est donné par

$$\begin{aligned} u : \Omega_t \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, t) &\longmapsto u(x, t) \end{aligned}$$

La description eulérienne consiste à travailler avec des quantités sur la configuration déformée Ω_t (dans le cas le plus simple, le champ de vitesse $u(x, t)$). La description lagrangienne consiste à travailler avec des quantités sur la configuration de référence Ω_0 (les caractéristiques $X(\xi, t)$).

Les deux formulations sont équivalentes en vertu de la relation

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\xi, t) = u(X(\xi, t), t) \tag{1.1}$$

qui est complétée avec la condition initiale $X(\xi, 0) = \xi$

1.1.2 Déterminant et cofacteurs

On suppose dans toute la suite que les déformations $X(\cdot, t)$ ne change pas l'orientation c'est à dire

$$\det(\nabla_\xi X(\xi, t)) > 0$$

Cette relation permettra d'enlever les valeurs absolues des jacobiens dans les changements de variables d'intégrales. On introduit les cofacteurs par la relation

$$\text{Cof}(A) = \det(A)A^{-T} \quad \text{Tr}(\text{Cof}(A)) = \frac{1}{2}(\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2))$$

Nous aurons dans la suite besoin de la dérivée du déterminant. Notons E_{ij} les vecteurs de la base canonique des matrices. Nous obtenons facilement avec la formule de développement du déterminant

$$\det(A + tE_{ij}) = \det(A) + t[\text{Cof}(A)]_{ij} \quad \det'(A)(E_{ij}) = [\text{Cof}(A)]_{ij}$$

avec $H = \sum_{i,j} H_{ij}E_{ij}$ et le fait que la différentielle est linéaire

$$\det'(A)(H) = \sum_{i,j} [\text{Cof}(A)]_{ij}H_{ij} = \text{Tr}(\text{Cof}(A)^T H) = \det(A) \text{Tr}(A^{-1}H)$$

Si A est une matrice qui dépend du temps la relation précédente se réécrit

$$\det(A(t))_t = \det(A(t)) \text{Tr}(A(t)^{-1}A'(t)) \quad (1.2)$$

1.1.3 Changements de variables

Pour des volumes, le changement de variable $x = X(\xi, t)$ permet de se ramener à la configuration de référence

$$\int_{X(\Omega_0, t) = \Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_0} f(X(\xi, t), t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) d\xi \quad (1.3)$$

L'idée intuitive de la démonstration est la suivante. On se donne une base (e_1, e_2, e_3) dans Ω_0 . Ces vecteurs sont déformés avec X (on enlève la dépendance en temps) avec la formule

$$X(\xi + h) = X(\xi) + [\nabla_\xi X]h + o(h) \quad (1.4)$$

Les vecteurs de base e_i dans la configuration de référence sont donc transformés en $[\nabla_\xi X]e_i$ dans la configuration déformée. Le volume élémentaire d'un parallélépipède est donnée par le produit mixte ou le déterminant des trois vecteurs.

$$dx = \det([\nabla_\xi X]e_1, [\nabla_\xi X]e_2, [\nabla_\xi X]e_3) = \det([\nabla_\xi X])\det(e_1, e_2, e_3) = \det([\nabla_\xi X])d\xi$$

Pour des surfaces, la formule générale de changement de variable est donnée par

$$\int_{X(\partial\Omega_0,t)=\partial\Omega_t} f(x,t)ds = \int_{\partial\Omega_0} f(X(\xi,t),t) |\text{Cof}(\nabla_\xi X(\xi,t))n_0(\xi)| ds_0 \quad (1.5)$$

Cette formule se démontre en se ramenant à un ouvert de \mathbb{R}^2 avec une paramétrisation. L'idée intuitive de la démonstration consiste à choisir une base (e_1, e_2) du plan tangent dans la configuration initiale. on a alors $n_0(\xi) = e_1 \wedge e_2 / |e_1 \wedge e_2|$. Ces vecteurs sont transformés dans la configuration déformée en $a_i = [\nabla_\xi X]e_i$ et pour tout vecteur v

$$([\nabla_\xi X]e_1 \wedge [\nabla_\xi X]e_2) \cdot [\nabla_\xi X]v = \det([\nabla_\xi X]e_1, [\nabla_\xi X]e_2, [\nabla_\xi X]v) = \det([\nabla_\xi X])(e_1 \wedge e_2) \cdot v$$

On en déduit

$$[\nabla_\xi X]e_1 \wedge [\nabla_\xi X]e_2 = \text{Cof}([\nabla_\xi X])(e_1 \wedge e_2)$$

On a donc

$$ds = |a_1 \wedge a_2| = |\text{Cof}([\nabla_\xi X])n_0| |e_1 \wedge e_2| = |\text{Cof}([\nabla_\xi X])n_0| ds_0$$

et

$$n(X(\xi,t),t) = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|} = \frac{\text{Cof}(\nabla_\xi X(\xi,t))n_0(\xi)}{|\text{Cof}(\nabla_\xi X(\xi,t))n_0(\xi)|} \quad (1.6)$$

On peut en déduire facilement (σ est une matrice)

$$\int_{X(\partial\Omega_0,t)=\partial\Omega_t} \sigma(x,t)n(x,t)ds = \int_{\partial\Omega_0} \sigma(X(\xi,t),t) \text{Cof}(\nabla_\xi X(\xi,t))n_0(\xi)ds_0 \quad (1.7)$$

où $n(x,t)$ désigne la normale en $x \in \partial\Omega_t$ et $n_0(\xi)$ désigne la normale en $\xi \in \partial\Omega_0$.

Dans toute la suite, on considère un domaine volumique Ω_0 qui évolue dans le temps avec le champ de vitesses $u(x,t)$ vérifiant (1.1) c'est à dire $X(\Omega_0,t) = \Omega_t$. Pour obtenir les équations du milieu continu, on appliquera les principes de mécanique à ce volume Ω_t . Les variations de quantités telles que la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie dans le volume Ω_t seront donc effectuées à l'aide de dérivées temporelles.

1.1.4 Formule de Reynolds

La formule de Reynolds pour les volumes s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} f(x,t)dx \right) = \int_{\Omega_t} f_t + \text{div}(fu)dx \quad (1.8)$$

On a en utilisant (1.2) et (1.1)

$$(\det(\nabla_\xi X(\xi, t)))_t = \det(\nabla_\xi X) \operatorname{Tr}([\nabla_\xi X]^{-1} \nabla_\xi(u(X(\xi, t), t))) = \det(\nabla_\xi X) \operatorname{div}(u)(X(\xi, t), t)$$

Nous avons également avec (1.1)

$$(f(X(\xi, t), t))_t = (f_t + u \cdot \nabla_x f)(X(\xi, t), t)$$

En dérivant la formule (1.3) par rapport au temps en utilisant les deux propriétés précédentes puis en se ramenant à la configuration de référence, on obtient la formule de Reynolds.

1.2 Conservation de la masse

1.2.1 Conservation de la masse eulérien

La conservation de la masse stipule que la variation de masse d'un volume Ω_t est indépendante du temps

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx \right) = 0$$

En utilisant la formule de Reynolds (1.8) avec $f = \rho$ on obtient la conservation de la masse dans la configuration déformée

$$\boxed{\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0} \quad (1.9)$$

1.2.2 Conservation de la masse lagrangien

Il suffit de se ramener à la configuration de référence avec (1.3)

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_0} \rho(X(\xi, t), t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) d\xi \right) = 0 \quad (1.10)$$

que l'on peut écrire, comme $X(\xi, 0) = \xi$

$$\boxed{\rho(X(\xi, t), t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) = \rho_0(\xi)} \quad (1.11)$$

1.3 Conservation de la quantité de mouvement

1.3.1 Conservation de la quantité de mouvement eulérien

Ce principe stipule que la variation de la quantité de mouvement d'un système est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur ce système. On applique ce principe à un

volume Ω_t . Les forces extérieures sont volumiques notées $f(x, t)$ (elles s'appliquent sur Ω_t) et surfaciques (elles s'appliquent sur $\partial\Omega_t$). Le principe de Cauchy montre que les forces surfaciques s'écrivent $\sigma(x, t)n(x, t)$. L'équilibre des moments permet de plus de montrer que σ est symétrique.

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(x, t)u(x, t)dx \right) = \int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t)n(x, t)ds + \int_{\Omega_t} f(x, t)dx \quad (1.12)$$

La formule de Reynolds (1.8) avec $f = \rho u$ donne

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho u dx \right) = \int_{\Omega_t} (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) dx \quad (1.13)$$

On intégrant par parties le terme surfacique on obtient les équations eulériennes sur la configuration déformée Ω_t

$$\boxed{(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \operatorname{div}(\sigma) + f} \quad (1.14)$$

En développant et en utilisant la conservation de la masse (1.9)

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) + u(\rho_t + \operatorname{div}(\rho u)) = \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u)$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement se réécrivent

$$\rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) = \operatorname{div}(\sigma) + f \quad (1.15)$$

1.3.2 Conservation de la quantité de mouvement lagrangien

Pour passer au lagrangien il suffit de réécrire les équations précédentes sur la configuration de référence. Pour la force volumique, on utilise (1.3)

$$\int_{\Omega_t} f(x, t)dx = \int_{\Omega_0} f(X(\xi, t), t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) d\xi$$

Pour la force surfacique on utilise le changement de variable pour les surfaces (1.7)

$$\int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t)n(x, t)ds = \int_{\partial\Omega_0} \sigma(X(\xi, t), t) \operatorname{Cof}(\nabla_\xi X(\xi, t))n_0(\xi)ds_0$$

Introduisons le 1er tenseur de Piola Kirchoff \mathcal{T}

$$\boxed{\mathcal{T}(\xi, t) = \sigma(X(\xi, t), t) \operatorname{Cof}(\nabla_\xi X(\xi, t))} \quad (1.16)$$

Remarquons que ce tenseur \mathcal{T} n'est pas symétrique contrairement à σ qui l'est. En utilisant une intégration par parties il vient

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div}_x(\sigma(x, t)) dx = \int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t) n(x, t) ds = \int_{\partial\Omega_0} \mathcal{T}(\xi, t) n_0(\xi) ds_0 = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}_\xi(\mathcal{T}(\xi, t)) d\xi \quad (1.17)$$

Pour le terme de quantité de mouvement on utilise (1.3) et (1.11)

$$\int_{\Omega_t} \rho(x, t) u(x, t) dx = \int_{\Omega_0} \rho(X(\xi, t), t) u(X(\xi, t), t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) d\xi = \int_{\Omega_0} \rho_0(\xi) u(X(\xi, t), t) d\xi$$

Avec (1.1), on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(x, t) u(x, t) dx \right) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\xi) \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(\xi, t) d\xi$$

On obtient finalement les équations lagrangiennes sur la configuration de référence Ω_0

$$\boxed{\rho_0(\xi) \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(\xi, t) = \operatorname{div}_\xi(\mathcal{T}(\xi, t)) + f(X(\xi, t), t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t))} \quad (1.18)$$

Contrairement à la formulation eulérienne, la conservation de la masse ne nécessite pas une équation supplémentaire, elle est directement prise en compte avec la densité initiale. Cela est dû au fait que les équations sont posées sur la configuration de référence.

Autre démonstration

Au lieu de faire un changement de variable pour les intégrales de surfaces pour montrer (1.17), on va montrer directement la relation

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div}_x(\sigma(x, t)) dx = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}_\xi(\mathcal{T}(\xi, t)) d\xi$$

avec un changement de variable pour les volumes. Pour cela nous allons montrer que (on enlève la dépendance en temps)

$$A = \operatorname{div}_\xi(\sigma(X(\xi)) \operatorname{Cof}(\nabla_\xi X)) = \operatorname{div}_x(\sigma)(X(\xi)) \det(\nabla_\xi X(\xi)) \quad (1.19)$$

On a en développant

$$A_i = (\sigma_{ik}(X(\xi)) [\operatorname{Cof}(\nabla_\xi X)]_{kj})_{,\xi_j} = (\sigma_{ik}(X(\xi)))_{,\xi_j} [\operatorname{Cof}(\nabla_\xi X)]_{kj} + \sigma_{ik}(X(\xi)) ([\operatorname{Cof}(\nabla_\xi X)]_{kj})_{,\xi_j}$$

Le dernier terme est nul par l'identité de Piola

$$\operatorname{div}(\operatorname{Cof}(\nabla_\xi X)) = 0$$

Cette propriété se démontre en montrant que les cofacteurs de $\nabla_\xi X$ sont le rotationnel d'un certain champ de vecteurs. Nous avons avec la définition des cofacteurs $A \text{Cof}(A)^T = \det(A)I$

$$A_i = \sigma_{ik,x_l}(X(\xi))X_{,\xi_j}^l [\text{Cof}(\nabla_\xi X)]_{kj} = [\nabla_\xi X \text{Cof}(\nabla_\xi X)^T]_{lk} \sigma_{ik,x_l}(X(\xi)) = \det(\nabla_\xi X)(\text{div}_x(\sigma)(X(\xi)))_i$$

En utilisant la relation (1.19), on obtient la relation voulue en ajoutant le temps

$$\int_{\Omega_t} \text{div}(\sigma) dx = \int_{\Omega_0} \text{div}_x(\sigma)(X(\xi, t), t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) d\xi = \int_{\Omega_0} \text{div}_\xi(\mathcal{T}(\xi, t)) d\xi$$

1.4 Conservation de l'énergie totale

1.4.1 Conservation de l'énergie totale en eulérien

Notons e l'énergie totale du système par unité de masse. Cette énergie peut se décomposer en deux parties

$$e = \frac{1}{2}|u|^2 + \varepsilon$$

Le terme $\frac{1}{2}|u|^2$ correspond à l'énergie cinétique (par unité de masse) et ε à l'énergie interne au sens large (par unité de masse). L'énergie interne dépend des variables thermodynamiques dans le cas d'un gaz ou de la déformation dans le cas d'un milieu élastique (parfois cette énergie élastique est dite énergie potentielle).

Le premier principe de la thermodynamique stipule que la variation d'énergie totale est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, sous forme de chaleur et de travail. Nous allons nous placer ici dans le cas adiabatique c'est à dire qu'il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur (dans le cas contraire il faudrait considérer des flux $q \cdot n$ sur la frontière et des flux radiatifs dans le volume). L'énergie sous forme de travail se décompose en une partie sur le bord des forces internes $(\sigma n) \cdot u$ ainsi qu'une partie sur le volume des forces externes $f \cdot u$. Le premier principe dans le cas adiabatique s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho e dx \right) = \int_{\partial\Omega_t} (\sigma n) \cdot u ds + \int_{\Omega_t} f \cdot u dx \quad (1.20)$$

En utilisant une formule de Reynolds volumique (1.8) et intégrant par parties $(\sigma n) \cdot u = (\sigma^T u) \cdot n$

$$(\rho e)_t + \text{div}(\rho e u) = \text{div}(\sigma^T u) + f \cdot u \quad (1.21)$$

Comme σ est symétrique dans les cas auxquels on s'intéresse il paraît inutile d'utiliser la notation σ^T . Cependant cela va nous permettre de trouver les bonnes équations (avec \mathcal{T}^T) lorsque l'on va passer en lagrangien. En utilisant la conservation de la masse (1.9), on peut remplacer le membre de gauche par $\rho(e_t + u \cdot \nabla e)$. Cependant lorsque l'on considère l'énergie il est préférable de la laisser sous forme conservative.

Lorsque l'on considère les effets de viscosité on introduit une contrainte supplémentaire σ_{visc}

$$\sigma_{\text{visc}} = \mu([\nabla u] + [\nabla u]^T) + \eta \operatorname{div}(u)I$$

Si on suppose que ce tenseur est deviatorique (pas de partie sphérique) alors $\operatorname{Tr}(\sigma_{\text{visc}}) = 0$ et on retrouve l'hypothèse de Stokes $2\mu + 3\eta = 0$. Dans la suite nous négligeons cette contrainte visqueuse dans les équations.

1.4.2 Conservation de l'énergie totale en lagrangien

On va maintenant partir de la formule (1.20) et se ramener à la configuration de référence. Avec un changement de variable surfacique (1.5), la relation sur les normales (1.6) et (1.16)

$$\int_{\partial\Omega_t} (\sigma n) \cdot u ds = \int_{\partial\Omega_0} (\sigma(X(\xi, t), t) n(X(\xi, t), t)) \cdot u(X(\xi, t), t) |\operatorname{Cof}(\nabla_\xi X) n_0(\xi)| ds_0 = \int_{\partial\Omega_0} (\mathcal{T} n_0) \cdot X_t ds_0$$

L'équation (1.20) se réécrit donc en utilisant la conservation de la masse (1.11)

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(x, t) e(x, t) dx \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_0} \rho_0(\xi) e(X(\xi, t), t) d\xi \right) \quad (1.22)$$

et nous avons

$$\int_{\partial\Omega_0} (\mathcal{T} n_0) \cdot X_t ds_0 = \int_{\partial\Omega_0} (\mathcal{T}^T X_t) \cdot n_0 ds_0 = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}_\xi (\mathcal{T}^T X_t) d\xi \quad (1.23)$$

De plus

$$\int_{\Omega_t} f(x, t) \cdot u(x, t) dx = \int_{\Omega_0} f(X(\xi, t), t) \cdot X_t(\xi, t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) d\xi$$

L'équation sous forme locale s'écrit

$$\boxed{(\rho_0 e)_t = \operatorname{div}_\xi (\mathcal{T}^T X_t) + f(X, t) \det(\nabla_\xi X) \cdot X_t} \quad (1.24)$$

1.5 Conservation de l'énergie interne

1.5.1 Conservation de l'énergie interne en eulérien

On rappelle la définition de l'énergie interne

$$\varepsilon = e - \frac{1}{2}|u|^2$$

Nous allons déduire l'équation de conservation de l'énergie interne à partir de celle de la vitesse u et de l'énergie totale e .

En utilisant la formule de Reynolds volumique (1.8)

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho |u|^2 dx \right) = \int_{\Omega_t} (\rho |u|^2)_t + \operatorname{div}(\rho |u|^2 u) dx = \int_{\Omega_t} \rho \left((|u|^2)_t + \nabla |u|^2 \cdot u \right) + |u|^2 (\rho_t + \operatorname{div}(\rho u)) dx$$

En utilisant la conservation de la masse (1.9) et $\nabla |u|^2 \cdot u = 2((u \cdot \nabla)u) \cdot u$ puis la conservation de la quantité de mouvement (1.14) on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \frac{1}{2} \rho |u|^2 dx \right) = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\sigma) \cdot u + f \cdot u dx \quad (1.25)$$

En développant la divergence, nous obtenons (attention à la transposée)

$$\operatorname{div}(\sigma^T u) = \operatorname{div}(\sigma) \cdot u + \sigma : \nabla u \quad (1.26)$$

En utilisant la conservation de l'énergie totale, on obtient en mettant tout bout à bouts

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho \varepsilon dx \right) = \int_{\Omega_t} \sigma : \nabla u dx} \quad (1.27)$$

En utilisant une formule de Reynolds, on obtient la forme locale des équations

$$(\rho \varepsilon)_t + \operatorname{div}(\rho \varepsilon u) = \sigma : \nabla u \quad (1.28)$$

En utilisant la conservation de la masse (1.9) on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\boxed{\rho(\varepsilon_t + u \cdot \nabla \varepsilon) = \sigma : \nabla u} \quad (1.29)$$

Remarquons que comme σ est symétrique $\sigma : \nabla u = \sigma : D(u)$ c'est à dire que les rotations ne travaillent pas

1.5.2 Conservation de l'énergie interne en lagrangien

Nous allons maintenant obtenir ces relations en lagrangien. En faisant des changements de variables et en utilisant la conservation de la masse

$$\int_{\Omega_t} \rho(x, t) \varepsilon(x, t) dx = \int_{\Omega_0} \rho_0(\xi) \varepsilon(X(\xi, t), t) d\xi$$

et avec la relation $[\nabla_\xi X_t] = [\nabla_x u][\nabla_\xi X]$

$$\int_{\Omega_t} \sigma : \nabla u dx = \int_{\Omega_0} \sigma(X(\xi, t), t) : [\nabla_\xi X_t][\nabla_\xi X]^{-1} J(\xi, t) d\xi = \int_{\Omega_0} \sigma(X(\xi, t), t) \text{Cof}(\nabla_\xi X) : \nabla_\xi X_t d\xi$$

On obtient donc avec (1.16)

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_0} \rho_0(\xi) \varepsilon(X(\xi, t), t) d\xi \right) = \int_{\Omega_0} \mathcal{T} : \nabla_\xi X_t d\xi}$$

et la forme locale de cette équation est

$$(\rho_0 \varepsilon)_t = \mathcal{T} : \nabla_\xi X_t \quad (1.30)$$

On peut retrouver ce résultat. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement

$$(\rho_0 |X_t|^2 / 2)_t = (\rho_0 X_t)_t \cdot X_t = \text{div}_\xi(\mathcal{T}) \cdot X_t + f(X, t) \det(\nabla_\xi X) \cdot X_t$$

Avec l'équation sur l'énergie, les termes en f s'annulent et en développant la divergence (attention à la transposé)

$$(\rho_0 \varepsilon)_t = (\rho_0 e - \rho_0 |X_t|^2 / 2)_t = \text{div}_\xi(\mathcal{T}^T X_t) - \text{div}_\xi(\mathcal{T}) \cdot X_t = \mathcal{T} : \nabla_\xi X_t$$

1.6 Résumé

Les équations eulériennes sont données sur Ω_t par

$$\begin{aligned} \rho_t + \text{div}(\rho u) &= 0 \\ (\rho u)_t + \text{div}(\rho u \otimes u) &= \text{div}(\sigma) + f \\ (\rho e)_t + \text{div}(\rho e u) &= \text{div}(\sigma^T u) + f \cdot u \end{aligned}$$

Ces équations sont complétés par des conditions initiales $\rho(x, 0), u(x, 0), e(x, 0)$ et des conditions limites sur la vitesse ou sur σn .

Les équations lagrangiennes sont données sur Ω_0 par

$$\begin{aligned}(\rho_0 X_t)_t &= \operatorname{div}(\mathcal{T}) + f(X, t) \det(\nabla_\xi X) \\ (\rho_0 e)_t &= \operatorname{div}(\mathcal{T}^T X_t) + f(X, t) \det(\nabla_\xi X) \cdot X_t\end{aligned}$$

Ces équation est complété par des conditions initiales $\rho(\xi, 0), X(\xi, 0) = \xi, X_t(\xi, 0), e(\xi, 0)$ et des conditions limites qui peuvent porter sur X ou $\mathcal{T}n_0$.

Pour fermer ces systèmes d'équations, nous avons besoin de donner des lois de comportement qui permettent de relier σ et ε aux inconnues du problème. Nous allons maintenant passer aux lois de comportement élastiques puis retrouver comme cas particulier des fluides.

Chapitre 2

Élasticité lagrangienne

On s'intéresse maintenant au cas de l'élasticité. La formulation lagrangienne est la plus adapté pour plusieurs raisons

- prise en compte de la surface libre Ω_t inconnue, en se ramenant la configuration de référence
- le tenseur des contraintes \mathcal{T} s'exprime en fonction de $\nabla_\xi X$ ce qui ferme le système
- les caractéristiques permettent de prendre en compte des déformation par rapport à une configuration de référence ("effet mémoire")

2.1 Matériau hyperélastique

Un matériau est dit élastique si son énergie dépend de $\nabla_\xi X$ et de l'entropie s . Dans le cas général cette énergie s'écrit

$$\rho_0(\xi)\varepsilon(X(\xi, t), t) = W(\nabla_\xi X(\xi, t), s(X(\xi, t))) \quad (2.1)$$

$W(F, s)$ désigne ici la densité d'énergie volumique (notations usuelles en élasticité). En dérivant l'expression précédente par rapport au temps et en utilisant la relation (1.30) nous obtenons

$$\frac{\partial W}{\partial F} : \nabla_\xi X_t + \frac{\partial W}{\partial s} (s(X, t))_t = \mathcal{T} : \nabla_\xi X_t$$

On introduit la température T

$$T = \left. \frac{\partial W}{\partial s} \right|_{F=cte} (\nabla_\xi X, s(X, t))$$

Si on impose la relation

$$\mathcal{T}(\xi, t) = \left. \frac{\partial W}{\partial F} \right|_{s=cte} (\nabla_\xi X, s(X, t)) \quad (2.2)$$

Nous obtenons alors que (si $T > 0$)

$$s(X(\xi, t), t) = cte$$

c'est à dire que l'entropie est simplement transportée par le milieu continu. Notons que cette propriété s'applique uniquement si le champ de vitesse est régulier. En effet nous avons utilisé les lois de conservations locale et la régularité de ces équations pour obtenir la relation (1.30). En particulier, l'entropie n'est pas transportée lorsque des chocs se produisent, mais l'entropie doit nécessairement augmenter.

Comme le tenseur des contraintes s'obtient en dérivant à entropie constante nous allons dans la suite enlever la dépendance en s . L'énergie élastique est donc donnée par la formule

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} W(\nabla_\xi X(\xi, t)) d\xi \quad (2.3)$$

Cette énergie est conservative car elle est indépendante du "chemin de déformations" choisi. Nous allons maintenant calculer le 1er tenseur de Piola-Kirchoff à l'aide de (2.2). Rappelons que le développement limité d'une fonction dépendant d'une matrice s'écrit

$$W(F + H) = W(F) + dW(F)(H) + o(|H|) = W(F) + \frac{\partial W}{\partial F}(F) : H + o(|H|) \quad (2.4)$$

où $A : B = \langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$. On a donc la relation

$$\mathcal{T}(\xi, t) = \frac{\partial W}{\partial F}(\nabla_\xi X(\xi, t)) \quad (2.5)$$

Cette formule nous permet de calculer les contraintes en fonction de l'énergie. On remarque que \mathcal{T} n'est pas forcément symétrique.

2.2 Principe d'indifférence matérielle

Les énergies que l'on considère en pratique ne sont pas quelconques, elles doivent obéir à certains principes physiques. On note $F = \nabla_\xi X$ et Q une rotation quelconque.

L'énergie doit vérifier le principe d'indifférence matérielle (AIM) qui s'écrit

$$\forall Q \in SO(3) \quad W(QF) = W(F) \quad (2.6)$$

Introduisons le tenseur de Cauchy Green à droite

$$\boxed{C(\xi, t) = [\nabla_\xi X(\xi, t)]^T [\nabla_\xi X(\xi, t)]} \quad (2.7)$$

On peut montrer que l'énergie associée à un matériau qui vérifie le principe d'indifférence matérielle s'écrit

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} \tilde{W}(C(\xi, t)) d\xi \quad (2.8)$$

Cette nouvelle énergie dépend uniquement de $C = F^T F$ et plus directement de F , il faut donc trouver un moyen de calculer \mathcal{T} . Pour ce faire introduisons $W(F) = \tilde{W}(F^T F)$. On a

$$W(F+H) = \tilde{W}(F^T F + F^T H + (F^T H)^T + H^T H) = \tilde{W}(F^T F) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C}(C) : (F^T H + (F^T H)^T) + o(|H|)$$

Comme C est symétrique, $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial C}$ est une matrice symétrique et le terme linéaire en H s'écrit $2F \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C}(C) : H$. En identifiant avec (2.4) on obtient donc

$$2F \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C}(C) = \frac{\partial W}{\partial F}(F) = \mathcal{T} \quad (2.9)$$

En introduisant le 2eme tenseur de Piola Kirchoff

$$\boxed{\Sigma(\xi, t) = [\nabla_\xi X(\xi, t)]^{-1} \mathcal{T}(\xi, t)} \quad (2.10)$$

On obtient

$$\Sigma = 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C}(C) \quad (2.11)$$

Cette relation est l'une des raisons pour lesquelles on introduit le 2ième tenseur de Piola Kirchoff.

2.3 Matériaux isotropes

Les matériaux vérifient souvent des propriétés de symétrie. Ils sont dits isotropes s'ils se comportent de la même manière dans toutes les directions. Dans ce cas l'énergie associée s'écrit

$$\forall Q \in SO(3) \quad W(FQ) = W(F) \quad (2.12)$$

Lorsque cette relation n'est vérifiée que pour certaines rotations, le matériau est dit anisotrope.

On peut montrer que l'énergie d'un matériau qui est isotrope et qui vérifie l'AIM s'écrit

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} \Phi(\iota_C(\xi, t)) d\xi \quad (2.13)$$

où $\iota_C = (\text{Tr}(C), \text{Tr}(\text{Cof}(C)), \det(C))$ sont les invariants de C . Il est aisé de montrer que une énergie du type (2.13) vérifie (2.6) et (2.12). La réciproque est plus délicate et est purement algébrique. Dans le cas d'un matériau anisotrope l'énergie dépend également de C mais également de tenseurs construits avec C et les directions privilégiées d'anisotropie notés τ . La chose importante à retenir est que c'est le tenseur de Cauchy Green à droite $C(\xi, t)$ qui intervient en élasticité lagrangienne.

2.4 Calcul du tenseur des contraintes Σ

2.4.1 Décomposition générale

On considère maintenant une énergie générale de la forme

$$\boxed{\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} W(\text{Tr}(C), \text{Tr}(\text{Cof}(C)), \det(C)) d\xi} \quad (2.14)$$

Nous avons d'après (2.11) (attention au 1/2)

$$\Sigma(C)/2 = \frac{\partial W(\iota_C)}{\partial C} = \frac{\partial W}{\partial a} \frac{\partial \text{Tr}(C)}{\partial C} + \frac{\partial W}{\partial b} \frac{\partial \text{Tr}(\text{Cof}(C))}{\partial C} + \frac{\partial W}{\partial c} \frac{\partial \det(C)}{\partial C}$$

On a les développements suivants (C est symétrique)

$$\begin{aligned} \text{Tr}(C + H) &= \text{Tr}(C) + \text{Tr}(H) \\ \text{Tr}(\text{Cof}(C + H)) &= \text{Tr}(\text{Cof}(C)) + \text{Tr}((\text{Tr}(C)I - C)H) + o(|H|) \\ \det(C + H) &= \det(C) + \det(C) \text{Tr}(C^{-1}H) + o(|H|) \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial \text{Tr}(C)}{\partial C} = I \quad \frac{\partial \text{Tr}(\text{Cof}(C))}{\partial C} = \text{Tr}(C)I - C \quad \frac{\partial \det(C)}{\partial C} = \det(C)C^{-1} \quad (2.15)$$

Donc avec (2.11) (il n'y a plus le 2 car on a mis 1/2 dans l'énergie!)

$$\boxed{\Sigma(\xi, t)/2 = \left(\frac{\partial W}{\partial a} + \text{Tr}(C) \frac{\partial W}{\partial b} \right) I - \frac{\partial W}{\partial b} C + \frac{\partial W}{\partial c} \det(C) C^{-1}} \quad (2.16)$$

Les dérivées partielles de W sont à prendre en ι_C . Le théorème de Cayley Hamilton s'écrit

$$C^3 - \text{Tr}(C)C^2 + \text{Tr}(\text{Cof}(C))C - \det(C)I = 0 \quad \det(C)C^{-1} = C^2 - \text{Tr}(C)C + \text{Tr}(\text{Cof}(C))I \quad (2.17)$$

Le tenseur des contraintes se réécrit avec (2.17)

$$\Sigma(\xi, t)/2 = \left(\frac{\partial W}{\partial a} + \text{Tr}(C) \frac{\partial W}{\partial b} + \text{Tr}(\text{Cof}(C)) \frac{\partial W}{\partial c} \right) I - \left(\frac{\partial W}{\partial b} + \text{Tr}(C) \frac{\partial W}{\partial c} \right) C + \frac{\partial W}{\partial c} C^2 \quad (2.18)$$

2.4.2 Décomposition volumique et isochoric

Nous allons maintenant écrire le tenseur des contraintes sous une autre forme en dissociant les parties liées aux changements de volumes et les parties purement élastiques. Pour ce faire introduisons le tenseur

$$\bar{C} = \frac{C}{\det(C)^{\frac{1}{3}}} \quad \det(\bar{C}) = 1 \quad (2.19)$$

Notons également

$$J = \det(\nabla_\xi X) = \det(C)^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

On décompose l'énergie en deux parties

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\text{Tr}(\bar{C}), \text{Tr}(\text{Cof}(\bar{C}))) d\xi$$

Nous avons donc pour la partie volumique $W(a, b, c) = W_{\text{vol}}(c^{\frac{1}{2}})$

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial b} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial c} = \frac{c^{-\frac{1}{2}}}{2} W'_{\text{vol}}(c^{\frac{1}{2}})$$

On obtient avec la formule (2.16)

$$\Sigma_{\text{vol}}(\xi, t) = JW'_{\text{vol}}(J)C^{-1} \quad (2.21)$$

Pour la partie isochoric $W(a, b, c) = W_{\text{iso}}(c^{-\frac{1}{3}}a, c^{-\frac{2}{3}}b)$. On note encore $\frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a}$ et $\frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b}$ les dérivées partielles par rapport à la première et la deuxième variable. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial a} &= c^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} & \frac{\partial W}{\partial b} &= c^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \\ \frac{\partial W}{\partial c} &= -\frac{1}{3} c^{-\frac{4}{3}} a \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} - \frac{2}{3} c^{-\frac{5}{3}} b \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b}\end{aligned}$$

On obtient donc en remplaçant dans (2.16) et en utilisant la définition de \bar{C} (2.19)

$$\Sigma_{\text{iso}} = 2J^{-\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} + \text{Tr}(\bar{C}) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \right) I - \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \bar{C} - \frac{1}{3} \left(\text{Tr}(C) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} + 2 \frac{\text{Tr}(\text{Cof}(C))}{\det(C)^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \right) C^{-1} \right)$$

Notons

$$\boxed{\bar{\Sigma}_{\text{iso}} = \left(\frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} + \text{Tr}(\bar{C}) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \right) I - \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \bar{C}} \quad (2.22)$$

En utilisant la relation $\text{Tr}(C) \text{Tr}(\bar{C}) - C : \bar{C} = 2 \det(C)^{-\frac{1}{3}} \text{Tr}(\text{Cof}(C))$, on obtient

$$\text{Tr}(C) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} + 2 \frac{\text{Tr}(\text{Cof}(C))}{\det(C)^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} = C : \bar{\Sigma}_{\text{iso}}$$

On obtient donc

$$\boxed{\Sigma_{\text{iso}}(\xi, t) = 2J^{-\frac{2}{3}} \left(\bar{\Sigma}_{\text{iso}} - \frac{1}{3} C^{-1}(C : \bar{\Sigma}_{\text{iso}}) \right) := 2J^{-\frac{2}{3}} \text{Dev}(\bar{\Sigma}_{\text{iso}})} \quad (2.23)$$

où l'on a noté Dev l'opérateur deviatorique en formulation lagrangienne qui vérifie les propriétés

$$\text{Dev}(A) := A - \frac{1}{3} C^{-1}(C : A) \quad \text{Dev}(A) : C = 0$$

2.5 Calcul du tenseur des contraintes σ

Le tenseur \mathcal{T} (ou de manière équivalente le tenseur Σ) permet de calculer les contraintes dans la configuration de référence. Cependant le tenseur des contraintes dans la configuration déformée est plus simple à interpréter physiquement. Dans ce cas il faut calculer le tenseur σ à l'aide des caractéristiques directes $X(\xi, t)$. Pour ce faire on utilise la relation (1.16) et (2.10)

$$\sigma(X(\xi, t), t) = J^{-1}[\nabla_{\xi}X(\xi, t)]\Sigma(\xi, t)[\nabla_{\xi}X(\xi, t)]^T \quad (2.24)$$

Après avoir introduit le tenseur de Cauchy Green à gauche

$$\tilde{B}(\xi, t) = [\nabla_{\xi}X(\xi, t)][\nabla_{\xi}X(\xi, t)]^T$$

Nous avons les relations suivantes

$$[\nabla_{\xi}X]I[\nabla_{\xi}X]^T = \tilde{B} \quad [\nabla_{\xi}X]C^{-1}[\nabla_{\xi}X]^T = I \quad [\nabla_{\xi}X]C[\nabla_{\xi}X]^T = \tilde{B}^2 \quad (2.25)$$

2.5.1 Décomposition générale

On s'intéresse tout d'abord au cas général de l'énergie $\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} W(\iota_C)d\xi$ dont le tenseur des contraintes Σ est donné par la relation (2.16). En utilisant (2.24) et (2.25) et le fait que \tilde{B} et C ont les mêmes invariants, on obtient

$$\boxed{\sigma(X(\xi, t), t) = 2J^{-1} \left(\frac{\partial W}{\partial c} \det(\tilde{B})I + \left(\frac{\partial W}{\partial a} + \text{Tr}(\tilde{B}) \frac{\partial W}{\partial b} \right) \tilde{B} - \frac{\partial W}{\partial b} \tilde{B}^2 \right)} \quad (2.26)$$

En utilisant (2.17)

$$\boxed{\sigma(X(\xi, t), t) = 2J^{-1} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial c} \det(\tilde{B}) + \frac{\partial W}{\partial b} \text{Tr}(\text{Cof}(\tilde{B})) \right) I + \frac{\partial W}{\partial a} \tilde{B} - \frac{\partial W}{\partial b} \det(\tilde{B}) \tilde{B}^{-1} \right)} \quad (2.27)$$

Remarquons que ce tenseur de Cauchy est écrit sur la configuration déformée mais qu'il est calculé de manière lagrangienne car il dépend des caractéristiques directes $X(\xi, t)$. Nous verrons dans le prochain chapitre comment calculer ce tenseur de manière eulérienne.

2.5.2 Décomposition volumique et isochoric

On s'intéresse maintenant au cas de l'énergie $\int_{\Omega_0} W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\text{Tr}(\bar{C}), \text{Tr}(\text{Cof}(\bar{C})))d\xi$ dont le tenseur des contraintes $\Sigma = \Sigma_{\text{vol}} + \Sigma_{\text{iso}}$ est donné par (2.21) et (2.23). Pour la partie volumique, on utilise (2.24), (2.25) et le fait que C et \tilde{B} ont les mêmes invariants

$$\boxed{\sigma_{\text{vol}}(X(\xi, t), t) = W'_{\text{vol}}(J)I} \quad (2.28)$$

Pour la partie isochoric, introduisons

$$\bar{\tilde{B}} = \frac{\tilde{B}}{\det(\tilde{B})^{\frac{1}{3}}} \quad \det(\bar{\tilde{B}}) = 1$$

et

$$J = \det(\nabla_\xi X) = \det(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}$$

Notons

$$\bar{\sigma}_{\text{iso}} = \left(\frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} + \text{Tr}(\tilde{B}) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \right) \tilde{B} - \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \tilde{B}^2$$

On a

$$[\nabla_\xi X] \bar{\Sigma}_{\text{iso}} [\nabla_\xi X]^T = \det(\tilde{B})^{\frac{1}{3}} \bar{\sigma}_{\text{iso}}$$

et

$$C : \bar{\Sigma}_{\text{iso}} = \det(\tilde{B})^{\frac{1}{3}} I : \bar{\sigma}_{\text{iso}}$$

En utilisant ce relations, ainsi que (2.24), (2.25), on obtient

$$\sigma_{\text{iso}}(X(\xi, t), t) = 2J^{-1} \left(\bar{\sigma}_{\text{iso}} - \frac{1}{3} I(I : \bar{\sigma}_{\text{iso}}) \right) = 2J^{-1} \text{dev}(\bar{\sigma}_{\text{iso}}) \quad (2.29)$$

où l'on a noté dev l'opérateur déviatoric en formulation eulérienne qui vérifie les propriétés

$$\text{dev}(A) := A - \frac{1}{3} I(I : A) \quad \text{dev}(A) : I = 0$$

En utilisant (2.17) la relation (2.29) reste vraie avec

$$\bar{\sigma}_{\text{iso}} = \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} \tilde{B} - \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \tilde{B}^{-1}$$

Remarquons qu'il y a normalement un terme supplémentaire proportionnel à l'identité. Nous l'avons omis car $\text{dev}(I) = 0$.

Chapitre 3

Elasticité Eulérienne

3.1 Préliminaires

Nous aimerions maintenant formuler de manière eulérienne l'élasticité. La formulation eulérienne décrit un milieu continu dans sa configuration déformée à l'aide de son champ de vitesse. Cette formulation ne permet donc pas tel quel de décrire l'élasticité car il est nécessaire de connaître la déformation par rapport à une configuration de référence. Pour prendre en compte ces "effets de mémoire" on introduit les caractéristiques rétrogrades Y

$$\begin{aligned} Y : \Omega_t \times [0, T] &\longrightarrow \Omega_0 \\ (x, t) &\mapsto Y(x, t) \end{aligned}$$

Ces fonctions sont liés aux caractéristiques directes X par les relations

$$X(Y(x, t), t) = x \qquad Y(X(\xi, t), t) = \xi \qquad (3.1)$$

L'équivalent eulérien de (1.1) est donné en dérivant (3.1) par rapport à t

$$Y_t(X(\xi, t), t) + [\nabla_x Y](X(\xi, t), t) X_t(\xi, t) = 0$$

En utilisant $x = X(\xi, t)$ et (1.1) on obtient l'équation de transport

$$Y_t + (u \cdot \nabla) Y = 0 \qquad (3.2)$$

En dérivant (3.1) par rapport à x ou ξ on obtient

$$[\nabla_\xi X(\xi, t)] = [\nabla_x Y(x, t)]^{-1} \qquad (3.3)$$

Cette relation est le point clé de la formulation eulérienne de l'élasticité car le gradient de déformation lagrangien est calculé à l'aide des caractéristiques rétrogrades.

Dans la formulation eulérienne nous avons une équation supplémentaire liée à la conservation de la masse (1.9). Les caractéristiques rétrogrades vont nous permettre d'éliminer cette équation. En repartant de (1.11) et en utilisant Y

$$\rho(x, t) = \det(\nabla_x Y(x, t))\rho(Y(x, t), 0) \quad (3.4)$$

Pour formuler de manière eulérienne l'énergie élastique nous allons avoir besoin de changement de variable permettant de se ramener à la configuration déformée. Nous avons de manière générale avec $\xi = Y(x, t)$

$$\int_{Y(\Omega_t, t)=\Omega_0} g(\xi, t)d\xi = \int_{\Omega_t} g(Y(x, t), t)\tilde{J}^{-1}(x, t)dx \quad (3.5)$$

où l'on a noté

$$\tilde{J}^{-1}(x, t) = \det(\nabla_x Y(x, t))$$

On repart de l'énergie générale lagrangienne

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} W(\nabla_\xi X(\xi, t), s(X(\xi, t), t))d\xi$$

Avec le changement de variable $\xi = Y(x, t)$, on obtient avec les relations précédentes

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} W([\nabla_x Y]^{-1}(x, t), s(x, t))\tilde{J}^{-1}(x, t)dx$$

En utilisant une formule de Reynolds volumique et en enlevant la dépendance en Y et s de W , on obtient

$$\mathcal{E}_t = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} W \tilde{J}^{-1} dx \right) = \int_{\Omega_t} (W \tilde{J}^{-1})_t + \operatorname{div}(W \tilde{J}^{-1} u) dx$$

En développant

$$\mathcal{E}_t = \int_{\Omega_t} (W_t + u \cdot \nabla W) \tilde{J}^{-1} + W((\tilde{J}^{-1})_t + \operatorname{div}(\tilde{J}^{-1} u)) dx \quad (3.6)$$

Comme $\int_{\Omega_0} d\xi = \int_{\Omega_t} \tilde{J}^{-1} dx$ est constant, une formule de Reynolds volumique donne

$$(\tilde{J}^{-1})_t + \operatorname{div}(\tilde{J}^{-1} u) = 0$$

Le dernier terme de l'expression précédente est donc nul et

$$\mathcal{E}_t = \int_{\Omega_t} (W_t + u \cdot \nabla W) \tilde{J}^{-1} dx \quad (3.7)$$

En remettant la dépendance en Y et s , on obtient

$$(W([\nabla Y]^{-1}, s))_t = \frac{\partial W}{\partial F} : ([\nabla Y]^{-1})_t + \frac{\partial W}{\partial s} s_t$$

et

$$u \cdot \nabla W([\nabla Y]^{-1}, s) = \frac{\partial W}{\partial F} : u \cdot \nabla [\nabla Y]^{-1} + \frac{\partial W}{\partial s} u \cdot \nabla s$$

En dérivant l'équation de transport sur Y , on obtient

$$([\nabla Y]^{-1})_t + u \cdot \nabla ([\nabla Y]^{-1}) = [\nabla u][\nabla Y]^{-1}$$

et donc

$$(W([\nabla Y]^{-1}, s))_t + u \cdot \nabla W([\nabla Y]^{-1}, s) = \frac{\partial W}{\partial F} : [\nabla u][\nabla Y]^{-1} + \frac{\partial W}{\partial s} (s_t + u \cdot \nabla s)$$

Avec la relation $\rho\varepsilon = \rho_0\varepsilon\tilde{J}^{-1} = W\tilde{J}^{-1}$, la conservation de l'énergie (1.27) devient

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} W\tilde{J}^{-1} dx \right) = \int_{\Omega_t} \sigma : \nabla u dx \quad (3.8)$$

Nous avons donc

$$\tilde{J}^{-1} \frac{\partial W}{\partial F} [\nabla Y]^{-T} : [\nabla u] + \tilde{J}^{-1} \frac{\partial W}{\partial s} (s_t + u \cdot \nabla s) = \sigma : \nabla u$$

Si l'on fait le choix d'imposer

$$\tilde{J}^{-1} \frac{\partial W}{\partial F} [\nabla Y]^{-T} = \sigma$$

Ce qui correspond à

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \sigma \text{Cof}(\nabla_\xi X)$$

et qui revient donc à faire le même choix qu'en lagrangien alors

$$s_t + u \cdot \nabla s = 0$$

C'est à dire que l'entropie est simplement transportés pour un champ de vitesse régulier. Le tenseur des contraintes étant calculé à entropie constante, on enlève cette dépendance dans la suite.

3.2 Matériau hyperélastique isotrope vérifiant l'AIM

Introduisons le tenseur de Cauchy Green à gauche

$$\tilde{B}(\xi, t) = [\nabla_\xi X(\xi, t)][\nabla_\xi X(\xi, t)]^T \quad (3.9)$$

En élasticité lagrangienne le tenseur $C(\xi, t)$ intervient naturellement. Comme nous allons le voir, en élasticité eulérienne c'est le tenseur $\tilde{B}(\xi, t)$ qui intervient de manière naturelle. Remarquons dès maintenant que \tilde{B} et C ont les mêmes invariants (AB et BA ont le même polynôme caractéristique). Considérons une énergie élastique qui vérifie le principe d'indifférence matérielle et qui est isotrope

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} W(\iota_{C(\xi,t)}) d\xi = \int_{\Omega_0} W(\iota_{\tilde{B}(\xi,t)}) d\xi$$

D'après la relation (3.3) nous avons pour $\xi = Y(x, t)$

$$\tilde{B}(Y(x, t), t) = [\nabla_x Y(x, t)]^{-1} [\nabla_x Y(x, t)]^{-T} := B(x, t) \quad (3.10)$$

En utilisant le changement de variable (3.5) et (3.10) nous obtenons

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} W(\iota_{B(x,t)}) \tilde{J}^{-1}(x, t) dx$$

3.3 Calcul du tenseur des contraintes σ

3.3.1 Décomposition générale

On considère l'énergie isotrope et vérifiant l'indifférence matérielle

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} W(\text{Tr}(B), \text{Tr}(\text{Cof}(B)), \det(B)) \tilde{J}^{-1} dx \quad (3.11)$$

Pour calculer la dérivée temporelle nous avons besoin de connaître les équations de transport vérifiées par les invariants de B .

L'équation de transport (3.2) nous permet d'obtenir

$$([\nabla Y]_t + u \cdot \nabla([\nabla Y])) = -[\nabla Y][\nabla u] \quad ([\nabla Y]^T)_t + u \cdot \nabla([\nabla Y]^T) = -[\nabla u]^T [\nabla Y]^T$$

Puis

$$([\nabla Y]^{-1})_t + u \cdot \nabla([\nabla Y]^{-1}) = [\nabla u][\nabla Y]^{-1} \quad ([\nabla Y]^{-T})_t + u \cdot \nabla([\nabla Y]^{-T}) = [\nabla Y]^{-T} [\nabla u]^T$$

Nous en déduisons facilement avec (3.10)

$$B_t + u \cdot \nabla B = [\nabla u]B + B[\nabla u]^T \quad (3.12)$$

Remarquons que il n'est pas possible d'obtenir de telles équations avec le tenseur C .

Nous obtenons ensuite

$$\text{Tr}(B)_t + u \cdot \nabla \text{Tr}(B) = 2B : \nabla u$$

$$\text{Tr}(\text{Cof}(B))_t + u \cdot \nabla \text{Tr}(\text{Cof}(B)) = 2[\text{Tr}(B)B - B^2] : \nabla u$$

$$(\det(B))_t + u \cdot \nabla(\det(B)) = 2 \det(B)I : \nabla u$$

Nous avons

$$(W(\iota_B))_t = \frac{\partial W}{\partial a} \text{Tr}(B)_t + \frac{\partial W}{\partial b} \text{Tr}(\text{Cof}(B))_t + \frac{\partial W}{\partial c} (\det(B))_t$$

En utilisant les équations de transport précédentes

$$(W(\iota_B))_t = -u \cdot \nabla(W(\iota_B)) + 2 \left(\left(\frac{\partial W}{\partial a} + \text{Tr}(B) \frac{\partial W}{\partial b} \right) B - \frac{\partial W}{\partial b} B^2 + \frac{\partial W}{\partial c} \det(B)I \right) : [\nabla u]$$

Nous obtenons donc en remplaçant dans (3.7)

$$\mathcal{E}_t = \int_{\Omega_t} 2\tilde{J}^{-1} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial a} + \text{Tr}(B) \frac{\partial W}{\partial b} \right) B - \frac{\partial W}{\partial b} B^2 + \frac{\partial W}{\partial c} \det(B)I \right) : [\nabla u] \, dx$$

D'après la formule (3.8) nous obtenons

$$\boxed{\sigma(x, t) = 2\tilde{J}^{-1} \left(\frac{\partial W}{\partial c} \det(B)I + \left(\frac{\partial W}{\partial a} + \text{Tr}(B) \frac{\partial W}{\partial b} \right) B - \frac{\partial W}{\partial b} B^2 \right)} \quad (3.13)$$

En utilisant Cayley Hamilton (2.17)

$$\boxed{\sigma(x, t) = 2\tilde{J}^{-1} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial c} \det(B) + \frac{\partial W}{\partial b} \text{Tr}(\text{Cof}(B)) \right) I + \frac{\partial W}{\partial a} B - \frac{\partial W}{\partial b} \det(B)B^{-1} \right)} \quad (3.14)$$

On retrouve les mêmes résultats que (2.26) et (2.27). La différence essentielle entre les résultats réside dans le fait que l'on utilise les caractéristiques directes (lagrangien) pour l'un et les caractéristiques rétrogrades (eulérien) pour l'autre. Le lien entre les deux est réalisé avec les relations

$$x = X(\xi, t) \quad \xi = Y(x, t) \quad \tilde{B}(Y(x, t), t) = B(x, t) \quad \tilde{J}(x, t) = J(Y(x, t), t)$$

3.3.2 Décomposition volumique et isochoric

Nous allons maintenant écrire le tenseur des contraintes sous une autre forme en dissociant les parties liées aux changements de volumes et les parties purement élastiques. Pour ce faire introduisons le tenseur

$$\bar{B} = \frac{B}{\det(B)^{\frac{1}{3}}} \quad \det(\bar{B}) = 1$$

Notons également

$$\tilde{J}(x, t) = \det(B(x, t))^{\frac{1}{2}}$$

On décompose l'énergie en deux parties

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} (W_{\text{vol}}(\tilde{J}) + W_{\text{iso}}(\text{Tr}(\bar{B}), \text{Tr}(\text{Cof}(\bar{B})))) \tilde{J}^{-1} dx$$

Nous avons donc pour la partie volumique

$$W(a, b, c) = W_{\text{vol}}(c^{\frac{1}{2}}) \quad \frac{\partial W}{\partial c} = \frac{c^{-\frac{1}{2}}}{2} W'_{\text{vol}}(c^{\frac{1}{2}})$$

On obtient avec la formule (3.13)

$$\sigma_{\text{vol}}(x, t) = W'_{\text{vol}}(\tilde{J}) I \quad (3.15)$$

Pour l'autre partie

$$W(a, b, c) = W_{\text{iso}}(c^{-\frac{1}{3}} a, c^{-\frac{2}{3}} b)$$

On note encore $\frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a}$ et $\frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b}$ les dérivées partielles par rapport à la première et la dernière variable. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a} &= c^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} & \frac{\partial W}{\partial b} &= c^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \\ \frac{\partial W}{\partial c} &= -\frac{1}{3} c^{-\frac{4}{3}} a \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} - \frac{2}{3} c^{-\frac{5}{3}} b \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \end{aligned}$$

On obtient donc en remplaçant dans (3.13)

$$\sigma_{\text{iso}} = 2\tilde{J}^{-1} \left(\left(\frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} + \text{Tr}(\bar{B}) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \right) \bar{B} - \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \bar{B}^2 - \frac{1}{3} I \left(\text{Tr}(\bar{B}) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} + 2 \text{Tr}(\text{Cof}(\bar{B})) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \right) \right)$$

Notons

$$\boxed{\bar{\sigma}_{\text{iso}} = \left(\frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} + \text{Tr}(\bar{B}) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \right) \bar{B} - \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \bar{B}^2}$$

En utilisant $2 \text{Tr}(\text{Cof}(\bar{B})) = \text{Tr}(\bar{B}) \text{Tr}(\bar{B}) - \bar{B}^2 : I$ on obtient

$$\text{Tr}(\bar{B}) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} + 2 \text{Tr}(\text{Cof}(\bar{B})) \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} = \bar{\sigma}_{\text{iso}} : I$$

On obtient donc

$$\boxed{\sigma_{\text{iso}}(x, t) = 2\tilde{J}^{-1} \left(\bar{\sigma}_{\text{iso}} - \frac{1}{3} I(\bar{\sigma}_{\text{iso}} : I) \right) := 2\tilde{J}^{-1} \text{dev}(\bar{\sigma}_{\text{iso}})} \quad (3.16)$$

où l'on a noté dev l'opérateur déviatorique en description eulérienne qui vérifie les propriétés

$$\text{dev}(A) := A - \frac{1}{3} I(I : A) \quad \text{dev}(A) : I = 0$$

En utilisant (2.17) la relation (3.16) reste vraie avec

$$\boxed{\bar{\sigma}_{\text{iso}} = \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial a} \bar{B} - \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial b} \bar{B}^{-1}}$$

Remarquons qu'il y a normalement un terme supplémentaire proportionnel à l'identité. Nous l'avons omis car $\text{dev}(I) = 0$.

On retrouve les mêmes résultats que (2.28) et (2.29). La différence essentielle entre les résultats réside dans le fait que l'on utilise les caractéristiques directes (lagrangien) pour l'un et les caractéristiques rétrogrades (eulérien) pour l'autre. Le lien entre les deux est réalisé avec les relations

$$x = X(\xi, t) \quad \xi = Y(x, t) \quad \tilde{B}(Y(x, t), t) = B(x, t) \quad \tilde{J}(x, t) = J(Y(x, t), t)$$

Chapitre 4

Gaz compressibles

Nous allons retrouver dans ce chapitre les lois de comportement des gaz comme un cas particulier de comportement élastique.

4.1 Approche élastique volumique des gaz

Considérons un milieu dont la loi de comportement est uniquement volumique, c'est à dire que la partie isochoric est nulle. On va partir de la formulation eulérienne car c'est la plus naturelle est la plus adaptée pour étudier les gaz. On considère une énergie interne qui dépend de la densité de de l'entropie

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} \rho \varepsilon(\rho, s) dx$$

Une formule de Reynolds volumique et la conservation de la masse donne

$$\mathcal{E}_t = \int_{\Omega_t} (\rho \varepsilon)_t + \operatorname{div}(\rho \varepsilon u) dx = \int_{\Omega_t} \rho (\varepsilon_t + u \cdot \nabla \varepsilon) dx$$

De plus

$$(\varepsilon(\rho, s))_t + u \cdot \nabla \varepsilon(\rho, s) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} (\rho_t + u \cdot \nabla \rho) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} (s_t + u \cdot \nabla s)$$

La conservation de l'énergie interne (1.27)

$$\mathcal{E}_t = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho \varepsilon dx \right) = \int_{\Omega_t} \sigma : \nabla u dx$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse que

$$\sigma : \nabla u = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} (\rho_t + u \cdot \nabla \rho)$$

alors nous obtenons que l'entropie est juste transportée par l'écoulement

$$s_t + u \cdot \nabla s = 0$$

En utilisant la conservation de la masse

$$\sigma : \nabla u = -\rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \operatorname{div}(u) = -\rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} I : \nabla u$$

$$\sigma = -\rho^2 \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right|_{s=cte} (\rho, s) I := -p(\rho, s) I$$

on retrouve la formule bien connue pour la pression

$$\boxed{p(\rho, s) = \rho^2 \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right|_{s=cte} (\rho, s)} \quad (4.1)$$

On introduit également la température par la formule

$$\boxed{T(\rho, s) = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right|_{\rho=cte} (\rho, s)} \quad (4.2)$$

4.2 Approche classique thermodynamique des gaz

En thermodynamique, on considère que les systèmes sont au repos à l'échelle macroscopique. Dans ce cas on néglige l'énergie cinétique et le 1er principe de la thermodynamique s'écrit

$$de = d\varepsilon = \delta Q - pdv$$

où v est le volume massique et p la pression car dans le cas d'un gaz, seules les forces de pression travaillent. Avec la variable $\rho = 1/v$, on obtient $-pdv = \frac{p}{\rho^2} d\rho$. Le deuxième principe de la thermodynamique permet d'écrire $\delta Q = Tds$ où s désigne l'entropie et T la température

$$\boxed{d\varepsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho}$$

Cette relation permet de comprendre pourquoi il est naturel d'exprimer l'énergie interne en fonction de la densité et l'entropie. Car toutes les autres quantités se calculeront à partir de cette énergie. Par exemple, nous obtenons facilement

$$T(\rho, s) = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right|_{\rho=cte} \quad p(\rho, s) = \rho^2 \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right|_{s=cte} \quad (4.3)$$

On rappelle également que l'on peut se donner d'autres énergies.

L'énergie libre d'Helmoltz $f(\rho, T)$

$$f = \varepsilon - Ts \quad df = \frac{p}{\rho^2}d\rho - sdT$$

On en déduit

$$p(\rho, T) = \rho^2 \left. \frac{\partial f}{\partial \rho} \right|_{T=cte} \quad s(\rho, T) = - \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{\rho=cte}$$

L'enthalpie $h(p, s)$

$$h = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \quad dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp$$

On en déduit

$$T(p, s) = \left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_{p=cte} \quad \rho(p, s) = 1 / \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_{s=cte}$$

L'énergie libre de Gibbs $g(T, p)$

$$g = h - Ts = f + \frac{p}{\rho} \quad dg = -sdT + \frac{1}{\rho}dp$$

On en déduit

$$s(T, p) = - \left. \frac{\partial g}{\partial T} \right|_{p=cte} \quad \rho(T, p) = 1 / \left. \frac{\partial g}{\partial p} \right|_{T=cte}$$

4.3 Lois de comportement pour les gaz

Considérons l'équation générale

$$\varepsilon(\rho, s) = \frac{e^{\frac{s}{C_v}}}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{\rho} - b \right)^{1-\gamma} - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho}$$

$C_v, \gamma, p_\infty, a, b$ désignent des constantes. On notera par la suite

$$\kappa(s) = e^{\frac{s}{C_v}}$$

On obtient avec (4.3)

$$T(\rho, s) = \frac{\kappa(s)}{C_v(\gamma - 1)} \left(\frac{1}{\rho} - b \right)^{1-\gamma} \quad p(\rho, s) = \kappa(s) \left(\frac{1}{\rho} - b \right)^{-\gamma} - a\rho^2 - p_\infty$$

En simplifiant les formules, on obtient

$$\boxed{\varepsilon(\rho, T) = C_v T - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho} \quad p(\rho, T) = \frac{\rho(\gamma - 1)C_v T}{1 - b\rho} - a\rho^2 - p_\infty}$$

$$\boxed{\varepsilon(\rho, p) = \frac{(p + a\rho^2 + p_\infty)(1 - \rho b)}{(\gamma - 1)\rho} - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho} \quad p(\rho, \varepsilon) = \frac{(\gamma - 1)}{1 - \rho b}(\rho\varepsilon + a\rho^2 - p_\infty) - (a\rho^2 + p_\infty)}$$

$$\boxed{(p + a\rho^2 + p_\infty)(1 - \rho b) = \rho(\gamma - 1)C_v T}$$

Remarquons que c'est la donnée de la loi $\varepsilon = \varepsilon(\rho, s)$ qui nous a permis d'en déduire toutes ces expressions et que si l'on considère uniquement la relation $p = f(\rho, T)$, on ne peut pas en déduire $\varepsilon = g(\rho, T)$. Ceci a une signification physique, ce que l'on peut mesurer dans un gaz, c'est la variation d'énergie lorsque que l'on varie la densité ou l'entropie à l'aide d'expériences.

Nous allons maintenant retrouver des modèles bien connus de la littérature comme cas particuliers de ce modèle

4.3.1 Gaz parfait

Prenons l'exemple de l'énergie d'un gaz parfait

$$\boxed{\varepsilon(\rho, s) = \frac{\kappa(s)\rho^{\gamma-1}}{\gamma - 1}}$$

Cette énergie est le cas particulier précédent avec $a = b = p_\infty = 0$, on obtient donc

$$\boxed{\varepsilon(\rho, T) = C_v T \quad \varepsilon(\rho, p) = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \quad p(\rho, T) = \rho(\gamma - 1)C_v T}$$

qui sont les expressions bien connues pour un gaz parfait de l'énergie interne et de la pression en fonction de la température et de la densité. Une valeur typique des paramètres est

$$\gamma = 1.4$$

4.3.2 Stiffened gas

Il permet de modéliser des gaz qui sont très peu compressibles comme l'eau. L'énergie est donnée par

$$\varepsilon(\rho, s) = \frac{\kappa(s)\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} + \frac{p_\infty}{\rho}$$

Cette énergie est le cas particulier précédent avec $a = b = 0$, on obtient donc

$$\varepsilon(\rho, T) = C_v T + \frac{p_\infty}{\rho} \quad \varepsilon(\rho, p) = \frac{p + \gamma p_\infty}{(\gamma - 1)\rho} \quad p(\rho, T) = -p_\infty + \rho(\gamma - 1)C_v T$$

Remarquons que l'on retrouve la loi des gaz parfaits en prenant $p_\infty = 0$. Remarquons que contrairement à un gaz parfait l'énergie interne ne dépend pas uniquement de la température T mais aussi de la densité ρ . Une valeur typique des paramètres est

$$\gamma = 4.4 \quad p_\infty = 10^8$$

4.3.3 Gaz de Van der Waals

Il permet de rendre compte de force d'interaction supplémentaire mais également du fait que l'on ne peut pas réduire un volume en un point. L'énergie est donnée par

$$\varepsilon(\rho, s) = \frac{\kappa(s)}{\gamma-1} \left(\frac{1}{\rho} - b \right)^{1-\gamma} - a\rho$$

Cette énergie est le cas particulier précédent avec $p_\infty = 0$, on obtient donc

$$\varepsilon(\rho, T) = C_v T - a\rho \quad \varepsilon(\rho, p) = \frac{(p + a\rho^2)(1 - \rho b)}{(\gamma - 1)\rho} - a\rho \quad p(\rho, T) = \frac{\rho(\gamma - 1)C_v T}{1 - b\rho} - a\rho^2$$

On peut réécrire cette dernière équation sous la forme la plus souvent présente dans la littérature avec $v = 1/\rho$

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = (\gamma - 1)C_v T$$

Remarquons que l'on retrouve la loi des gaz parfaits en prenant $a = b = 0$. Remarquons que contrairement à un gaz parfait l'énergie interne ne dépend pas uniquement de la température T mais aussi de la densité ρ . Une valeur typique des paramètres est

$$\gamma = 1.4 \quad a = 5 \quad b = 10^{-3}$$

4.4 Modèle complet gaz compressible eulérien

Les équations sont données par

$$\begin{aligned}\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0 \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + pI) &= 0 \\ (\rho e)_t + \operatorname{div}((\rho e + p)u) &= 0\end{aligned}$$

avec $e = |u|^2/2 + \varepsilon$ et

$$p(\rho, \varepsilon) = \frac{(\gamma - 1)}{1 - b\rho}(\rho\varepsilon + a\rho^2 - p_\infty) - (a\rho^2 + p_\infty)$$

Cette relation permet de fermer le système en utilisant $\varepsilon = e - |u|^2/2$. Cependant il est parfois préférable de garder une variable supplémentaire pour faire le lien entre ε et p . Par exemple la température ou l'entropie. Nous avons fait le choix de garder la variable entropie. Nous avons

$$\varepsilon(\rho, s) = \frac{\kappa(s)}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{\rho} - b \right)^{1-\gamma} - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho} \quad p(\rho, s) = \kappa(s) \left(\frac{1}{\rho} - b \right)^{-\gamma} - a\rho^2 - p_\infty$$

On peut bien sur éliminer le $\kappa(s)$ dans ces équations pour se ramener au cas précédent c'est à dire trouver une relation $p = p(\rho, \varepsilon)$. Cependant, on perd un petit peu l'interprétation physique. Par exemple, un cas très important dans la suite sera le cas isoentropique ($s = cte$) et on montrera qu'il suffira juste de calculer les valeurs propres dans ce cas la pour en déduire le cas général.

On peut également choisir la température comme variable intermédiaire

$$\varepsilon(\rho, T) = C_v T - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho} \quad p(\rho, T) = \frac{\rho(\gamma - 1)C_v T}{1 - b\rho} - a\rho^2 - p_\infty$$

Ces relations permettent de comprendre pourquoi les relations entre p et ρ dans les cas d'un gaz parfait isotherme et isoentropique sont donnés respectivement par

$$p = \beta\rho^\gamma \quad p = \alpha\rho$$

ici β est une fonction de s et α une fonction de T . On ne peut pas retrouver ces relations si on utilise seulement $p = \rho(\gamma - 1)\varepsilon$.

Chapitre 5

Conditions de stabilité en dimension 1

On s'intéresse aux conditions de stabilité de l'élasticité compressible. Pour ce faire il suffit de calculer les valeurs propres du système associé. Si ces valeurs propres sont réelles alors le système sera hyperbolique.

5.1 Formulation eulérienne

Les équations générales eulériennes sont données par

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad (5.1)$$

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u - \sigma) = 0 \quad (5.2)$$

$$(\nabla Y)_t + \nabla(u \cdot \nabla Y) = 0 \quad (5.3)$$

$$(\rho e)_t + \operatorname{div}(\rho e u - \sigma^T u) = 0 \quad (5.4)$$

5.1.1 Calcul des valeurs propres

Les équations eulériennes s'écrivent en 1D

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 - \sigma)_x = 0$$

$$(Y_x)_t + (u Y_x)_x = 0$$

$$(\rho e)_t + (\rho e u - \sigma^T u)_x = 0$$

Ces équations sont indépendantes car $\rho = Y_x \rho_0(Y)$. Dans le cas ρ_0 constant les équations sur ρ et Y_x sont redondantes et on peut en enlever une. De plus l'équation sur ρ contient

plus d'informations (il y a la condition initiale ρ_0 alors que $Y_x(x, 0) = 1$) et il est naturel d'exprimer les contraintes en fonction de ρ plutôt que Y_x . On remarque également que en 1D il n'y pas d'effet élastique à proprement parler car il n'y a pas d'effet de cisaillement mais uniquement des variations de volume (de longueur en 1D!). Nous pouvons donc réécrire ces équations

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 - \sigma)_x &= 0 \\ (\rho e)_t + (\rho e u - \sigma^T u)_x &= 0\end{aligned}$$

et nous obtenons les équations des fluides compressibles en 1D.

On réécrit le système précédent sous la forme

$$\Psi_t + (F(\Psi))_{,x} = 0$$

avec $\phi = \rho u$ et $\psi = \rho e$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} \quad F(\Psi) = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\phi^2}{\rho} - \sigma \\ \frac{(\psi - \sigma)\phi}{\rho} \end{pmatrix}$$

Les vitesses des ondes sont alors données par les valeurs propres de la jacobienne de $F(\Psi)$ par rapport à Ψ . Pour faire ce calcul il faut se donner une loi de comportement reliant σ aux autres variables conservatives du système $\sigma = \sigma(\rho, \phi, \psi)$. Le plus simple est de se donner une loi de comportement $\varepsilon(\rho, s)$

$$-\sigma = p = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \Big|_{s=te}(\rho, s) \quad \psi = \rho \varepsilon(\rho, s) + \frac{\phi^2}{2\rho}$$

Faisons le calcul dans le cas d'un gaz parfait

$$\varepsilon(\rho, s) = \frac{\kappa(s)\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \quad -\sigma = \rho^\gamma \kappa(s) = (\gamma-1)\rho \varepsilon(\rho, s) = (\gamma-1) \left(\psi - \frac{\phi^2}{2\rho} \right)$$

Le flux est donc donné dans ce cas par

$$F(\Psi) = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\phi^2}{\rho} + (\gamma-1) \left(\psi - \frac{\phi^2}{2\rho} \right) \\ \left(\psi + (\gamma-1) \left(\psi - \frac{\phi^2}{2\rho} \right) \right) \frac{\phi}{\rho} \end{pmatrix}$$

On a $(F(\Psi))_{,x} = F'(\Psi)\Psi_{,x}$ et on obtient

$$F'(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-3)\phi^2}{2\rho^2} & \frac{(3-\gamma)\phi}{\rho} & \gamma-1 \\ \frac{(\gamma-1)\phi^3 - \gamma\rho\phi\psi}{\rho^3} & \frac{2\gamma\rho\psi - 3(\gamma-1)\phi^2}{2\rho^2} & \frac{\gamma\phi}{\rho} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont données par

$$\Lambda = \left\{ \frac{\phi}{\rho}, \frac{\phi}{\rho} + \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{\rho} \left(\psi - \frac{\phi^2}{2\rho} \right)}, \frac{\phi}{\rho} - \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{\rho} \left(\psi - \frac{\phi^2}{2\rho} \right)} \right\} \quad (5.5)$$

5.2 Formulation lagrangienne

Les équations lagrangiennes s'écrivent

$$(\rho_0 X_t)_t = \operatorname{div}_\xi(\mathcal{T}) \quad (5.6)$$

$$(\rho_0 e)_t = \operatorname{div}_\xi(\mathcal{T}^T X_t) \quad (5.7)$$

Comme pour l'eulérien on peut remplacer l'équation sur l'énergie par la conservation de l'entropie sur les caractéristiques $s(X(\xi, t), t) = cte$ lorsque les solutions sont régulières. Afin de ne pas alourdir les notations on notera s au lieu de $s(X(\xi, t), t)$. Les équations lagrangiennes s'écrivent en 1D

$$(\rho_0 X_t)_t - (\mathcal{T}(X_\xi, s))_\xi = 0 \quad (5.8)$$

$$s_t = 0 \quad (5.9)$$

On se donne maintenant une loi constitutive $W(X_\xi, s)$ et le tenseur des contraintes est donné par

$$\mathcal{T}(X_\xi, s) = W_{,X_\xi}(X_\xi, s)$$

L'équation précédente se met sous la forme

$$\Psi_t + (F(\Psi))_\xi = 0$$

avec (on passe d'une équation avec des dérivées seconde à 2 équations avec des dérivées premières)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \rho_0 X_t \\ X_\xi \\ s \end{pmatrix} \quad F(\Psi) = \begin{pmatrix} -\mathcal{T}(X_\xi, s) \\ -\frac{\rho_0 X_t}{\rho_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{T}_{,X_\xi}$ et $\mathcal{T}_{,s}$ la dérivée de \mathcal{T} par rapport à X_ξ et s respectivement. Nous avons

$$F'(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{T}_{,X_\xi} & -\mathcal{T}_{,s} \\ -\frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient les valeurs propres

$$\Lambda^L = \left\{ 0, \sqrt{\frac{\mathcal{T}_{,X_\xi}}{\rho_0}}, -\sqrt{\frac{\mathcal{T}_{,X_\xi}}{\rho_0}} \right\} \quad (5.10)$$

Pour que les racines soient réelles et le système hyperbolique il suffit que ($'$ désigne la dérivée par rapport à X_ξ)

$$\boxed{\mathcal{T}_{,X_\xi} = W'' > 0} \quad (5.11)$$

On retrouve le fait que la fonction W doit être convexe pour que le système soit hyperbolique.

L'équation 1D lagrangienne se réécrit

$$\rho_0 X_{tt} = \mathcal{T}_{,X_\xi} X_{\xi\xi} \quad (5.12)$$

On retrouve donc le fait que, si cette condition d'hyperbolicité est vérifiée alors on obtient une équation des ondes (avec le bon signe!!) avec une vitesse dépendant de X_ξ . Nous allons maintenant faire le lien entre les deux formulations.

5.3 Lien entre les deux formulations

Pour ce faire il faut comparer les tenseurs des contraintes \mathcal{T} et σ ainsi que leurs dérivées. On enlève la dépendance des tenseur en entropie. La relation (3.3) se réécrit en 1D $\rho X_\xi = \rho_0$ et comme $\text{Cof}(\nabla_\xi X) = 1$ on a d'après (1.16)

$$\sigma(\rho) = \mathcal{T} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \quad - \sigma'(\rho) = \frac{\rho_0}{\rho^2} \mathcal{T}' \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) = (X_\xi)^2 \frac{\mathcal{T}'(X_\xi)}{\rho_0}$$

En notant $(\lambda_1^E, \lambda_2^E)$ les deux valeurs propres eulériennes de (5.5) (différentes de u) et $(\lambda_1^L, \lambda_2^L)$ les deux valeurs propres lagrangiennes (5.10) (différentes de 0), on obtient la relation

$$\lambda_i^E = u + X_\xi \lambda_i^L$$

Dans la version eulérienne il y a la vitesse u qui intervient et un terme supplémentaire en X_ξ . Le terme en u vient de la description eulérienne en un point fixé et le X_ξ du jacobien de la transformation. Un lien assez clair est établi entre les valeurs propres lagrangiennes et eulériennes. Regardons maintenant ce que deviennent ces relations pour plusieurs lois de comportement différentes.

5.4 Cas particuliers

Dans le cas eulérien 1D nous avons

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} \rho \varepsilon(\rho, s) dx \quad p(\rho, s) = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}(\rho, s)$$

Dans le cas général lagrangien 1D ($\varepsilon = W/\rho_0$)

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} W(X_\xi, s(X, t)) d\xi \quad \mathcal{T}(X_\xi, s(X, t)) = W_{,X_\xi}(X_\xi, s(X, t))$$

Le lien entre les deux formulations se fait avec la relation (on enlève la dépendance en entropie)

$$W(X_\xi) = \rho_0 \varepsilon \left(\frac{\rho_0}{X_\xi} \right) \quad W'(X_\xi) = -\rho^2 \varepsilon'(\rho)$$

Nous nous intéressons maintenant aux modèles obtenus dans quelques cas particuliers.

5.4.1 Euler isotherme

Dans le cas particulier où $\varepsilon(\rho) = (c_0)^2 \ln(\rho)$ on a

$$p(\rho) = (c_0)^2 \rho \quad c(\rho) = c_0$$

En lagrangien on obtient

$$\mathcal{T}(X_\xi) = -\frac{(c_0)^2 \rho_0}{X_\xi} \quad \mathcal{T}'(X_\xi) = \frac{\rho_0 (c_0)^2}{(X_\xi)^2}$$

Les équations en eulérien s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + (c_0)^2 \rho)_x &= 0 \end{aligned}$$

Les équations lagrangiennes deviennent dans ce cas

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{(c_0)^2}{(X_\xi)^2} X_{\xi\xi}$$

5.4.2 Cas quadratique

Dans le cas particulier où $\varepsilon(\rho, s) = \frac{1}{2\rho^2}$ on a

$$p(\rho, s) = -\frac{1}{\rho} \quad c^2(\rho, s) = \frac{1}{\rho^2}$$

Les équations en eulérien s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ (\rho u)_t + \left(\rho u^2 - \frac{1}{\rho} \right)_x &= 0 \end{aligned}$$

En lagrangien on obtient

$$\mathcal{T}(X_\xi) = \frac{X_\xi}{\rho_0} \quad \mathcal{T}'(X_\xi) = \frac{1}{\rho_0}$$

Les équations lagrangiennes deviennent dans ce cas

$$(\rho_0)^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = X_{\xi\xi}$$

On retrouve l'équation bien connue des ondes. On peut ajouter des constantes dans les lois pour obtenir des énergies homogènes du point de vue physique

5.4.3 Cas Shallow water

Dans le cas particulier où $\varepsilon(\rho) = \rho$ on a

$$p(\rho, s) = \rho^2 \qquad c(\rho, s) = 2\rho$$

Les équations en eulérien s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + \rho^2)_x &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve les équations Shallow water où ρ joue le rôle d'une hauteur d'eau.

En lagrangien on obtient

$$\mathcal{T}(X_\xi) = -\frac{(\rho_0)^2}{(X_\xi)^2} \qquad \mathcal{T}'(X_\xi) = \frac{2(\rho_0)^2}{(X_\xi)^3}$$

Les équations lagrangiennes deviennent dans ce cas

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{2\rho_0}{(X_\xi)^3} X_{\xi\xi}$$

On retrouve l'équation bien connue des ondes.